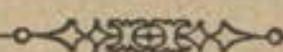
*В. Латышевъ.*

# РУКОВОДСТВО

КЪ

# ПРЕПОДАВАНІЮ АРИѲМЕТИКИ.








Изданіе К. И. Тихомирова,
*Комиссіонера ИМПЕРАТОРСКАГО Московскаго Общества Сельскаго Хозяйства и Московской Комиссіи Народныхъ Чтеній.*
(Кузнецкій Мостъ, книжный магазинъ).
Москва.—1896.

Дозволено цензурою. Москва, 31-го Іюля 1896 года.

МОСКВА.

Типо-Литографія Н. И. Гросманъ и К°, Маросейка д. Хвощинскаго.

1896.

## Предисловіе ко 2-му изданію.

Предлагаемая читателямъ книжка была напечатана лѣтъ 15 тому назадъ въ издаваемомъ мною и до сихъ поръ журналѣ «Русскій Начальный Учитель». Тогда выпущена она была и отдѣльнымъ изданіемъ, которое давно разошлось, но не возобновлялось мною, такъ какъ я все хотѣлъ дополнить книгу изложеніемъ всего хода преподаванія ариѳметики. Но все расширяющаясь практическая дѣятельность не давала возможности исполнить первоначальное намѣреніе.

На выставкѣ въ Нижнемъ-Новгородѣ мнѣ пришлось познакомить бывшихъ въ концѣ іюня на выставкѣ народныхъ учителей и учительницъ съ моей программой ариѳметики для начальной школы и объ-

яснить основанія, на которыхъ она построена. Сочувствіе къ программѣ учащихъ и просьбы дать печатное изложеніе бесѣды заставили меня рѣшиться напечатать новымъ изданіемъ предлагаемое руководство, безъ задуманнаго дополненія, т. к. написать его и теперь затрудняюсь по крайнему недостатку времени. Дополняю только программой, прочитанной на выставкѣ.

*В. Латышевъ.*

Ариѳметика съ давнихъ поръ считается необходимымъ предметомъ обученія во всякой начальной школѣ. На это есть двѣ причины. Первая та, что практическая потребность въ ариѳметическихъ знаніяхъ очень велика, вторая—что занятія ариѳметикой въ сильной степени развиваютъ учащихся. Но достигнуть этихъ цѣлей, особенно второй, вовсе нелегко и потому написано очень много книгъ о способахъ преподаванія ариѳметики (о *методахъ* преподаванія).

Во всѣхъ такихъ русскихъ книгахъ я нахожу важный недостатокъ, мѣшающій правильному пониманію дѣла и потому дающій поводъ къ огульному обвиненію въ негодности всѣхъ руководствъ къ преподаванію ариѳметики (методикъ). Этотъ недостатокъ—непрактичность составителей, именно составителей, а не ихъ совѣтовъ. Дѣло въ томъ, что авторы руководствъ къ преподаванію обыкновенно подробно описываютъ предлагаемые пріемы работы, но очень мало выясняютъ характеръ всего курса и значеніе каждаго отдѣльнаго упражненія въ ряду другихъ. Отсюда является очень часто непониманіе со стороны читателей, особенно неопытныхъ въ дѣлѣ преподаванія, значенія каждаго изъ отдѣльныхъ упражненій, является слишкомъ большая привязанность къ формѣ, а не сущности дѣла, такъ какъ послѣдняя остается непонятою, или, наоборотъ (по той же причинѣ), является слишкомъ легкое отношеніе къ предлагаемому методу, отрицаніе его полезности,—и все это

изъ за непригодности нѣкоторыхъ второстепенныхъ упражненій. Недостаткомъ практичности страдаетъ и первое разработанное руководство (изъ числа изданныхъ на русскомъ языкѣ), составленное г. Евтушевскимъ. Существованіе подобнаго недостатка даетъ тѣмъ сильнѣе себя чувствовать, что авторы руководствъ слишкомъ горячо стоятъ за каждое отдѣльное предлагаемое ими упражненіе, а также и за порядокъ ихъ, какъ будто въ этомъ все дѣло.

Что руководства къ преподаванію ариѳметики дѣйствительно не выясняютъ общей мысли курса—лучше всего видно на тѣхъ читателяхъ, которые, хотя и знакомы съ ариѳметикой, даже хорошо знакомы, но не преподавали ея.

Чтеніе руководства къ преподаванію для такихъ лицъ оказывается почти невозможнымъ: у нихъ ничего не остается въ памяти, именно потому, что смыслъ упражненій и связь между ними не видны, а заучиванье упражненій и невозможно, и не имѣетъ никакого смысла. Приходится читателю оставить книгу и обратиться къ ней только тогда, когда придется начать дѣло, когда придется обдумывать уроки. Въ этомъ случаѣ (такъ какъ опытности нѣтъ) начинающій учитель или учительница обыкновенно *буквально* держатся выбранной книжки, чаще всего книги г. Евтушевскаго. Труда тратится при этомъ очень много, опять таки потому, что авторами методикъ мало обращается вниманія на объясненіе того, какъ добиться отъ учениковъ хорошаго пониманія *цѣлаго* курса, всего пройденнаго, а не отдѣльныхъ уроковъ. Выходитъ, что учителю, придерживающемуся книги, удаются обыкновенно лишь отдѣльные уроки, а хорошо пройти весь курсъ онъ не можетъ. Да, умѣнье давать хорошіе отдѣльные уроки и умѣнье хорошо пройти *весь* курсъ — далеко не одно и тоже. Чѣмъ меньше познанія самаго учителя, чѣмъ меньше у него опытности, тѣмъ труднѣе ему хорошо пройти съ учениками весь курсъ какого-нибудь предмета. Помочь учителямъ въ этомъ дѣлѣ—прямая обязанность тѣхъ, которые, будучи сами вполнѣ знакомы съ предметомъ, занимаются приготовленіемъ учителей для начальныхъ училищъ.

Не смотря на указанный недостатокъ руководствъ къ преподаванію ариѳметики (о которыхъ я главнымъ образомъ говорю), въ нихъ всетаки говорится объ общей идеѣ курса, но только въ слишкомъ общихъ выраженіяхъ. Между тѣмъ у начинающихъ учи-

телей и учительницъ почти всегда бываетъ желаніе выяснить себѣ какъ теорію предмета, такъ и общую мысль того курса, который они должны вести. Мнѣ постоянно приходится наблюдать, что всѣ учителя, придерживавшіеся книги г. Евтушевскаго, особенное вниманіе обращали на тѣ немногія теоретическія разъясненія, которыя находятся въ книгѣ. Въ разговорѣ о пріемахъ преподаванія, пріемахъ рѣшенія задачъ они прежде всего упоминаютъ о возможности двоякаго анализа (и рѣшенія) задачъ, о томъ, что всѣ дѣйствія (будто-бы) сводятся къ сложенію и могутъ быть имъ замѣнены и т. д. Находя въ книгѣ объясненія такихъ вещей, о которыхъ въ учебникахъ вовсе не говорится, о которыхъ онъ не имѣлъ даже понятія, народный учитель, конечно, проникается уваженіемъ къ книгѣ, легко и вполнѣ ей вѣритъ и слѣдуетъ. А потомъ, при неудачѣ нѣкоторыхъ упражненій или при неумѣньи овладѣть *цѣлымъ* курсомъ, разочаровывается и, забывъ по немногу о первомъ впечатлѣніи, начинаетъ бранить книгу, во всемъ видѣть недостатки. Рѣзкость перехода зависитъ отъ того, что книга не можетъ поддержать перваго впечатлѣнія.

Итакъ, въ руководствахъ къ преподаванію предметовъ начальной школы необходимо давать не только *описаніе* предполагаемыхъ упражненій, но и объясненіе тѣхъ цѣлей, которыя должны быть достигнуты при прохожденіи какъ цѣлаго курса, такъ и каждой его части, необходимо указать на то, какъ связать отдѣльные уроки въ одно стройное цѣлое, какъ уберечься отъ увлеченія одной какой нибудь стороной дѣла, какъ сохранить послѣдовательность въ объясненіяхъ.

Для большаго успѣха дѣла важно различить *основанія метода* и различные пріемы его примѣненія: послѣдніе могутъ быть въ значительной степени разнообразны. Я думаю даже, что каждый учитель принесетъ пользу себѣ и ученикамъ, видоизмѣняя время отъ времени пріемы примѣненія метода, т. е. перемѣняя форму, порядокъ упражненій, отбрасывая или вновь прибавляя нѣкоторыя упражненія и т. п. Такія измѣненія оживляютъ учителя, а это весьма важно для успѣха дѣла. Впрочемъ, начинающимъ учителямъ, съ своей стороны, всетаки совѣтую, принимаясь за дѣло, прежде всего выбрать для себя руководство и придерживаться его въ первое время, стараясь уловить основныя черты ме-

тода, а потомъ уже, приглядѣвшись къ дѣлу, измѣнять тѣ или другія упражненія, въ случаѣ крайности—даже весь методъ, Иначе, неопытный преподаватель легко можетъ разбросаться и въ концѣ года не придти ни къ какому осязательному результату; слѣдуя порядочной книгѣ, преподаватель даже невольно сохранитъ нѣкоторую послѣдовательность и постепенность упражненій.

Бросать принятый методъ тотчасъ-же при неудачѣ преподаванія—во всякомъ случаѣ не слѣдуетъ. Не легко привыкать къ новому методу, а между тѣмъ неудача преподаванія большею частію зависитъ отъ примѣненія метода, т. е. отъ учителя, а не отъ самаго метода. Самый вѣрный путь для выбора метода — опредѣлить его основанія прежде, чѣмъ примешься разрабатывать методъ въ подробностяхъ.

Я думаю, что наиболѣе существенныя положенія методики ариѳметики не трудно выяснить, и думаю, что относительно нихъ возможно соглашеніе между учителями. Нѣтъ сомнѣнія, что *основныя* положенія методики ариѳметики должны быть одинаковы для всѣхъ народовъ, такъ какъ они зависятъ отъ свойствъ самаго предмета и отъ общихъ свойствъ человѣческаго духа; но выполненіе метода можетъ разнообразится очень сильно. Для удачи дѣла необходимо знать тѣхъ людей, которыхъ обучаешь, поэтому необходимо примѣняться и къ національности. У насъ же обыкновенно, или вовсе не принаравливаются къ особенностямъ русскихъ дѣтей, или думаютъ, что у русскихъ даже и ариѳметика должна быть не такая, какъ у другихъ народовъ.

Избирая методъ преподаванія учитель долженъ рѣшить: чего онъ желаетъ (чему хочетъ научить), такъ какъ отъ этого главнымъ образомъ долженъ зависѣть характеръ преподаванія, т. е. должно опредѣлиться, на какія стороны предмета слѣдуетъ особенно налегать при обученіи. Но при этомъ слѣдуетъ помнить, что хорошій результатъ преподаванія—не многочисленныя, *а основательныя* знанія. Обычная ошибка начинающихъ преподавателей—желаніе какъ можно больше сообщить знаній, отчего знанія выходятъ поверхностными, учитель легко разбрасывается. Между тѣмъ, нерѣдко случается, что не блестящія на видъ, даже не особенно живые уроки одного учителя въ концѣ-концовъ даютъ гораздо лучшіе результаты, чѣмъ оживленные и интересные уроки другого

только потому, что первый умѣетъ хорошо слѣдить за общею мыслью курса.

Методъ преподаванія можетъ очень много облегчить дѣло обученія, потому что можетъ способствовать сбереженію силъ учащихся, можетъ сдѣлать занятія болѣе интересными и полезными, даже пріятными; но не слѣдуетъ приписывать методу всемогущества. Еще большая сила лежитъ въ *самомъ предметѣ*, въ ясности стройности и законченности его теоріи. На эту внутреннюю силу самаго предмета въ послѣднее время стали обращать меньше вниманія, чѣмъ-бы слѣдовало, а прежде на нее возлагали всю надежду или, вѣрнѣе, не заботились о методахъ и потому образовательное вліяніе всякаго предмета почти исключительно зависѣло отъ его содержанія, а не отъ способа преподаванія. Но всѣ мы, нынѣшніе учителя и распространители новыхъ методовъ преподаванія, сами учились еще по старымъ и, слава Богу, поняли и ариѳметику, и грамматику, да и другимъ еще толкуемъ объ этихъ предметахъ. Стало быть можно выучиться, хотя-бы учителя не придерживались никакого новаго метода. Не признавая убѣдительности такого довода, нельзя допустить возможности открытія когда-бы то ни было новыхъ лучшихъ методовъ: если сами не понимаютъ дѣла, то гдѣ ужъ дѣлать какія-нибудь открытія.

По своей практикѣ, какъ преподаватель Учительскаго Института, я очень часто замѣчалъ, что молодые люди, слушающіе постоянно рѣчи о новыхъ методахъ преподаванія, о преимуществахъ этихъ новыхъ методовъ, невольно, незамѣтно приходятъ къ мысли о томъ, что въ старыхъ методахъ—все дурно, и только впослѣдствіи убѣждаются, что и въ нихъ были хорошія стороны. Во всякомъ случаѣ новые методы обученія, вообще говоря, много способствовали *облегченію* дѣла для дѣтей и тѣмъ уже принесли большую пользу.

Хорошій учитель съумѣетъ не только облегчить работу ученикамъ, но и возбудить ихъ энергію, и научить работѣ и даже заставить на практикѣ убѣдиться въ томъ, какъ важно приниматься за всякое дѣло обдуманно и умѣючи. Все это нужно для того, чтобы не только заставить учениковъ работать, но заставить ихъ оцѣнить полезность работы и полюбить ее. Полюбить работу можно, если она будетъ удаваться. Пусть-же трудъ будетъ всегда по си-

ламъ ученику! Но непремѣнно требуйте труда, требуйте усилій. Въ противномъ случаѣ ученикъ не пріучится къ работѣ и не будетъ ею заинтересованъ. Совѣты новѣйшихъ педагоговъ часто грѣшили тѣмъ, что слишкомъ ужъ облегчали работу ученика и потому способствовали не возбужденію, а ослабленію энергіи учащихся. Кого всегда тащутъ на помочахъ, тотъ уже не съумѣетъ ходить самъ, безъ поддержки!

При изложеніи метода преподаванія я постоянно буду обращать вниманіе на психологическое вліяніе предлагаемыхъ пріемовъ преподаванія, такъ какъ обученіе невозможно вполнѣ отдѣлить отъ воспитанія, хотя-бы мы даже и хотѣли это сдѣлать.

---

# ГЛАВА ПЕРВАЯ.

## Основныя положенія метода преподаванія ариѳметики.

Находя, что преподаваніе ариѳметики должно быть прежде всего преподаваніемъ *предмета*, я начинаю съ объясненія цѣли обученія и общихъ положеній метода, такъ какъ ими опредѣляется образъ дѣйствій, котораго слѣдуетъ держаться въ каждомъ частномъ случаѣ. На этомъ же основаніи и о преподаваніи ариѳметики въ сельской школѣ будетъ сказано позже.

Желая выяснить общій характеръ преподаванія ариѳметики, я счелъ необходимымъ прежде всего сказать: преподаваніе ариѳметики можетъ быть полезно только тогда, если будетъ вѣрно предмету, т. е. научитъ *ариѳметикѣ*. Кажется просто, но на дѣлѣ часто бываетъ иначе. Одинъ подъ видомъ ариѳметики хочетъ научить только быстро дѣлать вычисленія въ умѣ или даже на бумагѣ, другой хочетъ подъ тѣмъ-же предлогомъ научить бухгалтеріи (счетоводству), третій—исполненію тѣхъ упражненій, которыя онъ придумалъ, четвертый заботится только о задачахъ и т. д.

Всякій предметъ, въ томъ числѣ и ариѳметика, имѣетъ двѣ стороны: теоретическую и практическую; та и другая должны быть усвоены, чтобы получилась возможность пріобрѣсти полезныя знанія, приложить ихъ къ дѣлу и развить свой умъ. Теорія предмета не можетъ быть понята и усвоена, если не пояснялась практически, приложеніемъ этой теоріи къ дѣлу, къ частнымъ случаямъ. Практическія занятія сами по себѣ, т. е. не сопровождаемыя объ-

ясненіями, не обобщаемыя теоретически, едва-ли могутъ быть правильно поняты и не могутъ довести до умѣнья самостоятельно работать (такъ всегда бываетъ въ школахъ, сообщающихъ исключительно практическія знанія). Теорія—ничто иное какъ объясненіе всѣхъ отдѣльныхъ свѣдѣній, указывающее назависимость между послѣдними, т. е. указывающее на причину каждаго изъ нихъ. Понявъ въ чемъ дѣло, легко запомнить и факты. Итакъ, та и другая сторона всякаго предмета поясняютъ одна другую, обѣ одинаково необходимы.

Практическую строну *ариѳметики* представляютъ вычисленія и задачи, а теоретическую—объясненіе всѣхъ дѣйствій надъ различнаго рода числами и объясненіе свойствъ чиселъ. Постоянная потребность въ производствѣ вычисленій и въ рѣшеніи различныхъ численныхъ вопросовъ (задачъ) давно заставила позаботиться объ обученіи ариѳметикѣ въ начальныхъ школахъ. Теоретическія объясненія полезны потому, что, заставляя обратить вниманіе на смыслъ дѣлаемыхъ вычисленій, сознательно отнестись къ нимъ, пріучаютъ нашъ умъ къ наблюденію надъ окружающимъ и къ размышленію. Простота, ясность, опредѣленность и послѣдовательность ариѳметической теоріи дѣлаютъ ее однимъ изъ драгоцѣннѣйшихъ средствъ для правильнаго первоначальнаго развитія ума. Представленія о каждомъ изъ 4-хъ дѣйствій всегда существуютъ у дѣтей, приходящихъ въ школу. Каждому ребенку въ жизни уже случалось прибавлять одну величину къ другой (одинъ предметъ къ другому) или отнимать одну отъ другой, случалось одну и ту же величину (предметъ) брать нѣсколько разъ или дѣлить ее на части. Въ школѣ дитя научается сознательно относиться ко всѣмъ этимъ случаямъ. Но важно то, что оно, начиная учиться, имѣетъ уже нѣкоторую подготовку къ занятіямъ ариѳметикой, а по другимъ предметамъ—гораздо меньшую. Сила образовательнаго вліянія ариѳметики велика, потому что ребенокъ, дойдя до сознательнаго представленія о томъ, что онъ дѣлаетъ съ числами, постепенно переходитъ къ выработкѣ понятій о дѣйствіяхъ, къ опредѣленію ихъ и наконецъ доходитъ до полной и законченной теоріи. Если вся теорія постепенно вырабатывается на глазахъ учащихся, при ихъ дѣятельномъ участіи, то понятно, что при такихъ условіяхъ учащіеся легко могутъ не только усвоить самую теорію, но могутъ понять

и ея значеніе, ея пользу для пониманія всякаго дѣла, такъ какъ она дѣйствительно постоянно выяснитъ имъ все то, что представлялось прежде смутнымъ и сбивчивымъ, приведетъ къ очень несложнымъ и немногочисленнымъ выводамъ. На ариѳметическую теорію ученикъ, притомъ наталкивается естественнымъ образомъ: сама жизнь къ тому приводитъ. Вотъ вторая причина того, что ариѳметикѣ учатъ во всѣхъ школахъ. Ариѳметическая теорія на столько проста, что ее возможно въ главныхъ чертахъ пройти *всю* даже въ народной школѣ. Трудно сказать это про какой-нибудь другой предметъ.

Посмотримъ-же, въ чемъ состоитъ ариѳметическая теорія, чтобы точнѣе выяснить себѣ: къ чему должно стремиться при преподаваніи ариѳметики; а это необходимо и для рѣшенія другого вопроса: какимъ путемъ надо идти къ цѣли, т. е. это необходимо для опредѣленія основныхъ положеній метода обученія ариѳметикѣ.

Содержаніе всей ариѳметической теоріи, которая, въ главныхъ чертахъ, разумѣется, одинакова во всѣхъ курсахъ и учебникахъ ариѳметики (хотя она различно и неодинаково подробно изложена), сводится главнымъ образомъ къ понятіямъ о числахъ и дѣйствіяхъ надъ различнаго рода числами (цѣлыми числами, обыкновенными и десятичными дробями). Ариѳметическія же вычисленія примѣняются къ рѣшенію всякаго рода вопросовъ, когда желаютъ найти для нихъ точное рѣшеніе.

Дѣйствія надъ цѣлыми числами многими считаются несходными съ дѣйствіями надъ дробными числами. Это положительная ошибка. Кажущееся различіе дѣйствій зависитъ только отъ того, что дробныя числа изображаются иначе (посредствомъ двухъ чиселъ: числителя и знаменателя); но лишь только данныя дроби будутъ написаны въ одну строку, по тому же закону, какъ и цѣлыя числа, другими словами, лишь только данныя дроби будутъ обращены въ десятичныя—дѣйствія надъ ними будутъ дѣлаться такъ же, какъ и надъ цѣлыми числами. Потому и можно дать дѣйствіямъ надъ цѣлыми и дробными числами одинаковыя опредѣленія и названія, что въ томъ и другомъ случаѣ сущность дѣйствій одна и та-же. Замѣчу кстати, что дѣйствія надъ десятичными дробями остаются совершенно сходными съ дѣйствіями надъ обыкновенными дробями. Въ сложеніи и вычитаніи это сходство

очевидно: складываются и вычитаются одинаковыя доли. При умноженіи на обыкновенную дробь, мы умножаемъ множимое на числителя дроби, а потомъ дѣлимъ на ея знаменателя. Тоже самое дѣлается и при умноженіи на десятичную дробь, хотя ходъ вычисленія выражается обыкновенно иначе. Умножая на десятичную дробь „какъ на цѣлое число“, мы, собственно говоря, умножаемъ на числителя дроби (ставя запятую, мы какъ будто подписываемъ знаменателя дроби); когда же въ произведеніи отдѣляемъ столько десятичныхъ знаковъ сколько ихъ было въ дѣлителѣ, то этимъ самымъ мы дѣлимъ полученное число на знаменателя дроби—множителя. Напр.: $23 \times 0,3 = 6,9$ или $23 \times \frac{3}{10} = \frac{23.3}{10} = \frac{69}{10}$. Въ настоящемъ трудѣ не мѣсто приводить подробныя теоретическія объясненія, но подобныя объясненія не трудно дать и во всѣхъ другихъ случаяхъ.

Но дѣйствія, конечно, можно производить только тогда, когда числа, показывающія величины, или количества предметовъ какимъ нибудь образомъ выражены (устно или письменно),—поэтому прежде всего приходится придумать *систему* счисленія. (Особыя названія даются только немногимъ числамъ). Не всѣ числа могутъ быть выражены по одному способу, какова-бы ни была система счисленія; поэтому приходится придумывать новыя выраженія для такихъ чиселъ, которыхъ мы не можемъ написать по принятой системѣ счисленія. Раздѣляя, напримѣръ, 30 на 7, мы не можемъ выразить частное такъ, какъ выражены дѣлимое и дѣлитель,—и потому приходится придумать новый способъ выраженія подобныхъ чиселъ: во взятомъ примѣрѣ получаемое частное принято изображать двумя числами $\left(\frac{30}{7}\right)$. Въ отличие отъ прежнихъ чиселъ (цѣлыхъ) выраженіямъ новаго рода придано и новое названіе—дробныхъ чиселъ.

Само собою понятно, что вычисленія съ дробными выраженіями сложнѣе, чѣмъ съ цѣлыми числами, поэтому при изученіи ариѳметики необходимо разсмотрѣть производство дѣйствій надъ дробями. Оказывается, что при производствѣ дѣйствій съ дробями для упрощенія вычисленій необходимо сокращать дроби; а чтобы возможно было правильно и по возможности просто дѣлать сокращенія—необходимо узнать свойства дробей (измѣненіе дробей при измѣненіи числителя или знаменателя дроби). При сложеніи и вы-

читанія дробей необходимо приводить ихъ къ одному знаменателю. Для приведенія дробей къ одному знаменателю также необходимо знать свойства дробей.

Чтобы легче было отыскивать тѣ числа, на которыя можно сократить данныя дроби, необходимо знать признаки дѣлимости чиселъ, а для объясненія этихъ признаковъ надо знать свойства чиселъ. Чтобы найти такой знаменатель, къ которому можно было-бы привести всѣ данныя дроби — тоже нужно знать свойства чиселъ. Понятно, что въ полныхъ курсахъ свойства дробей всегда разсматриваются. Вотъ и все содержаніе курса ариѳметики.

Итакъ, вся ариѳметическая теорія заключается въ теоріи дѣйствій, а все остальное необходимо собственно для упрощенія и усовершенствованія вычисленій (производства тѣхъ-же дѣйствій) въ тѣхъ случаяхъ, когда данныя числа не могутъ быть выражены въ видѣ цѣлыхъ чиселъ (все остальное представляетъ развитіе *средствъ вычисленій).* Прилагая ариѳметическія дѣйствія къ рѣшенію задачъ, дѣти научаются понимать важное значеніе ариѳметическихъ дѣйствій, знакомятся съ примѣрами примѣненія теоріи къ практикѣ; рѣшенія задачъ вмѣстѣ съ тѣмъ развиваетъ сообразительность и смѣтливость учащихся, такъ какъ требуетъ приложенія пріобрѣтенныхъ свѣдѣній къ различнымъ случаямъ, научаетъ пользоваться пріобрѣтенными знаніями. Разнообразіе вопросовъ, для рѣшенія которыхъ нужно знать только 4 дѣйствія, по необходимости заставляетъ учениковъ *вглядываться въ смыслъ* дѣлаемыхъ вычисленій и потому-то способствуетъ выясненію теоріи.

Если-же содержаніе всей ариѳметики приводится къ 4 дѣйствіямъ, то на нихъ-то, разумѣется, и должно быть обращено особенное вниманіе преподавателя. Будутъ усвоены дѣйствія — вся ариѳметика будетъ усвоена.

При обученіи важно сразу поставить ученика на вѣрную дорогу, важно съ самаго начала сообщить ему вполнѣ правильное пониманіе предмета; только сдѣлать это нужно въ возможно простой формѣ. Отъ преподавателей очень часто можно услышать рѣчь о необходимости начинать съ простѣйшаго, переходя къ труднѣйшему, и эти слова многими повторяются безъ правильнаго пониманія дѣла. Начинать съ простѣйшаго — не значитъ начинать съ того, что *всего* легче; а съ того, что *хорошо* объясняетъ дѣло,

т. е. правильно и глубоко, но въ возможно *простой формѣ*. Потому-то и не слѣдуетъ начинать преподаваніе ариѳметики съ объясненія системы счисленія (нумераціи): хотя усвоеніе ея легко дается ученикамъ, но не ей принадлежитъ самая важная роль въ ариѳметикѣ, а дѣйствіямъ, не она помогаетъ ученикамъ *понять предметъ*.

Итакъ, начинать обученіе надо не съ того, что всего проще, а съ того, что всего *нужнѣе* для пониманія дѣла; но, разумѣется, необходимо объяснить дѣло *какъ можно проще и убѣдительнѣе*, не словами объясняя его, а разборомъ примѣровъ, заставляя работать самаго ученика, заставляя его собственнымъ опытомъ дойти до обобщенія. Какъ это сдѣлать?—вотъ въ чемъ задача методики.

Я творю, что на первомъ планѣ въ преподаваніи ариѳметики должы стоять дѣйствія и примѣненія ихъ къ рѣшенію задачъ, потому что дѣйствія объединяютъ всѣ отдѣльныя упражненія, составляютъ одно цѣлое—ариѳметику.

Смыслъ дѣйствій очень простъ; цѣль каждаго дѣйствія выражается его опредѣленіемъ *). Однако-же на практикѣ смыслъ дѣйствій очень часто понимается и опредѣляется неправильно, а для учениковъ переходъ отъ дѣйствій надъ цѣлыми числами къ дѣйствіямъ надъ дробными числами часто бываетъ труденъ; ученики иногда даже и до конца курса не могутъ хорошенько усвоить умноженія и дѣленія дробей.

Неудовлетворительное положеніе дѣла объясняется тѣмъ, что обыкновенно бываютъ неправильны первоначальныя объясненія, что впослѣдствіи вызываетъ путаницу. Особенно часто неправильно опредѣляются умноженіе и дѣленіе. Первое опредѣляется какъ *увели-*

---

*) *Сложеніе*—дѣйствіе, которымъ данныя числа (два или нѣсколько) соединяются въ одно.

*Вычитаніе*—дѣйствіе, посредствомъ котораго одно число отнимается отъ другаго.

*Умноженіе*—дѣйствіе, при которомъ одно число повторяется (берется слагаемымъ) столько разъ, сколько единицъ въ другомъ.

*Дѣленіе*—дѣйствіе, которымъ по произведенію и множителю отыскивается другой множитель. (Въ одномъ частномъ случаѣ дѣленіе представляетъ дробленіе на части; этотъ случай объясняетъ и названіе дѣйствія; въ другомъ частномъ случаѣ дѣленія мы знаемъ часть даннаго числа, а находимъ—сколько разъ она содержится въ цѣломъ).

*ченіе* даннаго число въ нѣсколько разъ, второе—какъ уменьшеніе даннаго числа. Привыкнувъ къ такимъ опредѣленіямъ, употребляя ихъ въ продолженіи 2—3 лѣтъ и даже болѣе, ученики до такой степени свыкаются съ такими неправильными представленіями о дѣйствіяхъ, что потомъ, переходя къ дробямъ, долго, очень долго никакъ не могутъ освоиться съ мыслью, что нахожденіе части или нѣсколькихъ частей даннаго числа также представляетъ собою умноженіе. Трудность перехода къ новымъ, болѣе широкимъ понятіямъ часто заставляетъ учащихся *заучивать* объясненія. Между тѣмъ трудность перехода могла-бы быть облегчена: достаточно только воздерживаться отъ такого опредѣленія умноженія, которое вызываетъ впослѣдствіи затрудненія. Сказавъ, что умноженіе есть такое дѣйствіе, при которомъ данное число *берется* (повторяется) нѣсколько разъ, мы потомъ легко можемъ добавить, что множитель показываетъ: сколько разъ берется множимое, что онъ показываетъ, какъ изъ множимаго надо составить новое число. Переходя впослѣдствіи къ дробямъ, мы можемъ выражаться также: множитель показываетъ, сколько частей множимаго надо взять. Можно достигнуть даже того, что ученики сами скажутъ: „данное число *надо умножить на дробь*", а тогда останется только разобрать: какъ сдѣлать такое умноженіе. Для достиженія цѣли слѣдуетъ только взять такую задачу, гдѣ-бы приходилось данное число умножать на цѣлое число съ дробью. (Напримѣръ: одинъ аршинъ сукна стоитъ 4 р., сколько стоятъ $5^1/_4$ ар.?). Предлагаемая форма опредѣленія умноженія позволяетъ *не перемѣнять* даннаго однажды опредѣленія, а только *дополнять его*, развивать. Въ этомъ я вижу большое преимущество, так какъ при сходствѣ опредѣленій дѣти легко поймутъ и сходство дѣйствій.

Дѣленіе слѣдуетъ первоначально опредѣлять какъ *дѣленіе на части* (но ни въ какомъ случаѣ не слѣдуетъ опредѣлять его какъ *уменьшеніе* даннаго числа); потомъ можно указать на существованіе другаго случая дѣленія—когда опредѣляется, сколько разъ одно число содержится въ другомъ. Дѣти обыкновенно безъ всякаго затрудненія признаютъ существованіе двухъ случаевъ, такъ какъ знаютъ это изъ собственнаго опыта (рѣшая задачи, они всегда вѣрно говорятъ, что надо раздѣлить одно число на другое, какой-бы изъ двухъ возможныхъ случаевъ ни представлялся). Впо-

слѣдствіи можно будетъ объяснить, почему оба случая дѣленія одинаково называются дѣленіемъ. Объясненію много помогаетъ повѣрка дѣйствія умноженіемъ: и въ томъ, и въ другомъ случаѣ дѣленія мы находимъ число, равное произведенію дѣлителя на частное, значитъ, дѣлимое всегда можно сравнить съ произведеніемъ, дѣлитель съ однимъ изъ множителей а частное съ другимъ. При переходѣ къ дробямъ опять можно взять такія задачи, рѣшая которыя ученики сами скажутъ, что надо раздѣлить одно изъ данныхъ на дробное число (всего лучше взять для объясненія случай дѣленія на смѣшанное число); а въ такомъ случаѣ вопросъ будетъ только въ томъ: какъ сдѣлать вычисленіе.

Не говоря, что дѣленіе—уменьшеніе числа, мы много облегчимъ учащимся переходъ отъ дѣйствій съ цѣлыми числами къ дѣйствіямъ надъ дробными числами, потому что ученикамъ не придется перемѣнять вполнѣ усвоенное понятіе о дѣленіи на новое, не придется переучиваться.

Объясненіе сложенія обыкновенно не затрудняетъ учащихся; опредѣленіе же вычитанія нерѣдко вызываетъ затрудненія, именно въ тѣхъ случаяхъ, когда учитель или учительница опредѣляютъ вычитаніе какъ такое дѣйствіе, посредствомъ котораго мы узнаемъ *насколько одно число больше другого*. Въ подобномъ случаѣ затрудненія встрѣчаются уже при объясненіи дѣйствій съ цѣлыми числами. Причина затрудненія кроется въ неправильности опредѣленія, обнимающаго собою только одинъ изъ случаевъ вычитанія, а не оба, *) что и обнаруживается при объясненіи задачъ. По приведенному опредѣленію нельзя, напримѣръ, объяснить рѣшенія такой задачи: въ одномъ классѣ сорокъ учениковъ, въ другомъ 6-ю меньше; сколько учениковъ во второмъ классѣ?

Приведенныхъ, примѣровъ, я думаю, достаточно, чтобы видѣть, насколько необдуманность опредѣленій, хотя-бы и годныхъ для тѣхъ случаевъ, къ которымъ эти опредѣленія относятся, затемняетъ дѣло и мѣшаетъ дальнѣйшимъ занятіямъ, мѣшаетъ правильному развитію мысли.

---

*) При вычитаніи иногда дѣйствительно узнается, насколько одно число больше другого, иногда-же бываетъ сказано, насколько одно число больше другого, а ищутъ, какое число настолько меньше даннаго, какъ видно изъ примѣра.

Необходимо помнить, что мы часто внушаемъ дѣтямъ неправильныя понятія не только тогда, если даемъ прямо неправильныя объясненія, но и тогда, если *предоставляемъ дѣтей самимъ себѣ, не заботимся о предупрежденіи ошибокъ.* Одного умолчанія о нѣкоторыхъ признакахъ понятія бываетъ достаточно, чтобы мысль учащихся, останавливаясь всегда на одинаковыхъ частныхъ случаяхъ, сложилась неправильно и чтобы учащіеся приняли эти частные случаи за общіе и даже признали невозможность другихъ случаевъ кромѣ тѣхъ, которые имъ извѣстны. (Ученики, напримѣръ, слышатъ только о такихъ случаяхъ умноженія, при которыхъ данное множимое увеличивается, и потому приходятъ къ полной увѣренности, что *только* такое умноженіе и существуетъ, хотя учитель не говорилъ имъ этого. Точно также, если ученики рѣшаютъ только опредѣленныя задачи, т. е. имѣющія одно рѣшеніе, притомъ задачи всегда имѣющія рѣшеніе, то думаютъ, что *всегда* можно найти число, удовлетворяющее условіямъ задачи, и только *одно* число, хотя учитель и не говорилъ имъ этого. Между тѣмъ и то и другое заключенія ошибочны).

При обученіи слѣдуетъ, разумѣется, такъ поставить дѣло, чтобы первыя объясненія, предлагаемыя учащимся, не мѣшая правильному образованію понятій, въ тоже время были-бы какъ можно болѣе просты.

И такъ, въ самомъ началѣ курса необходимо обратить вниманіе на образованіе у дѣтей правильныхъ понятій о дѣйствіяхъ и дать эти понятія по возможности въ простой формѣ.

Всего лучше для достиженія цѣли взять дѣйствія надъ небольшими числами. Тогда вычисленіе не будетъ затруднять учащихся, не будетъ обращать на себя вниманія—и все вниманіе дѣтей естественнымъ образомъ сосредоточится на значеніи дѣлаемаго вычисленія, т. е. на *смыслѣ дѣйствія,* чего и надо достигнуть. Чтобы обратить вниманіе на смыслъ дѣлаемаго вычисленія (т. е. на смыслъ дѣйствія), необходимо знакомить съ дѣйствіями не на отвлеченныхъ примѣрахъ, а на вопросахъ, имѣющихъ видъ задачъ, такъ какъ подобные вопросы невольно обращаютъ вниманіе учениковъ именно на то, что *дѣлается* съ числомъ.

(Напримѣръ, мальчикъ три раза ходилъ за дровами и каждый разъ приносилъ по 6 полѣнъ. Сколько полѣнъ онъ принесъ? Рѣшая

вопросъ, ученикъ будетъ ясно понимать, что число 6 надо *повторить три раза*, такъ какъ мальчикъ три раза бралъ по 6 полѣнъ. Пониманіе дѣла со стороны ученика выразится тѣмъ, что ученикъ сумѣетъ объяснить, *почему* онъ повторилъ число три раза).

Маленькія дѣти однакоже очень часто затрудняются вычисленіями, даже и съ числами перваго десятка. Въ такомъ случаѣ необходимо начать занятія съ упражненій въ вычисленіяхъ съ числами перваго десятка; если-же мы начнемъ прямо съ рѣшенія задачъ, то ученикамъ придется побѣждать двѣ трудности: они будутъ затрудняться и разборомъ условій задачи и самымъ вычисленіемъ. Въ большинствѣ случаевъ дѣти, встрѣчая въ задачѣ большія, затрудняющія ихъ числа, прямо говорятъ, что не могутъ рѣшить задачи; если-же числа ихъ не затрудняютъ, а только самая задача, то они обыкновенно *пробуютъ* рѣшить задачу, слѣдовательно не теряютъ бодрости.

Умѣя производить вычисленія, дѣти могутъ, какъ я сейчасъ сказалъ, сосредоточить все вниманіе на уясненіи того, что дѣлается съ числомъ. Рѣшивъ значительное число примѣровъ и каждый разъ высказывая своими словами, что они дѣлали съ данными числами, ученики могутъ сами замѣтить, что всѣ встрѣчавшіяся имъ вычисленія приводятся къ небольшому числу различныхъ случаевъ (т. е. всего къ 4 дѣйствіямъ). Существованіе всего 4 различныхъ дѣйствій выразится и внѣшнимъ образомъ, если будутъ записываться дѣлаемыя вычисленія: каждое дѣйствіе обозначается особымъ знакомъ. Дѣти обыкновенно безъ труда пріучаются къ правильному употребленію знаковъ дѣйствій. Когда-же ученики поняли, что дѣлается съ числами въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ, и замѣтили, что существующихъ дѣйствій немного, тогда они смогутъ сами выразить то, въ чемъ состоитъ каждое дѣйствіе, т. е. смогутъ составить опредѣленія дѣйствій. Роль учителя состоитъ въ томъ, чтобы понять, когда пора будетъ обратить вниманіе дѣтей на смыслъ дѣйствій (т. е. угадать тотъ моментъ, когда дѣти смогутъ сами оставить опредѣленія дѣйствій), дать хорошо выбранныя упражненія, помогающія дѣтямъ уловить сущность дѣла, потребовать отъ нихъ составленія опредѣленія, дать названіе каждому дѣйствію и, наконецъ, провѣрить, правильно-ли понимаетъ данныя опредѣленія каждый ученикъ класса. Впослѣдствіи учитель дол-

женъ еще постоянно напоминать выработанныя опредѣленія. Учителю, короче сказать, принадлежитъ *постановка* дѣла (слѣдовательно и каждаго отдѣльнаго вопроса) и выборъ упражненій, а заключенія должны дѣлать сами ученики. Но если учитель не будетъ требовать отъ учениковъ объясненій того, что они дѣлаютъ, то послѣдніе (за весьма рѣдкими исключеніями) не будутъ задумываться надъ тѣмъ, что дѣлаютъ, поэтому не только не пріобрѣтутъ знаній, но еще привыкнутъ вообще не задумываться надъ тѣмъ, что дѣлаютъ, исполняя работу механически, и постепенно привыкнутъ даже безучастно относиться къ дѣлу. Да, наибольшій интересъ въ занятіяхъ дѣти всегда видятъ въ объясненіяхъ того, что проходится; хорошія объясненія учителя вызываютъ расположеніе къ нему учениковъ; но въ то же время сами дѣти очень легко ограничиваются механическимъ исполненіемъ данной работы и тогда уже бываютъ недовольны, если новый учитель станетъ постоянно требовать отъ нихъ объясненій. Объясняется это кажущееся противорѣчіе тѣмъ, что дѣти первоначально всегда любознательны, но въ то же время желаютъ непремѣнно *исполнить* работу и получить одобреніе, силамъ-же своимъ не довѣряютъ. Ученики просятъ объясненій, но если учитель не даетъ ихъ, то дѣти руководятся уже однимъ желаніемъ какъ нибудь исполнить работу *). Механическое исполненіе работъ всегда легче сознательнаго усвоенія данныхъ объясненій, поэтому то ученики, не получившіе объясненій или непонявшіе ихъ, всегда и останавливаются на запоминаніи хода вычисленій, но не смысла ихъ. Если же весь классъ долго, можетъ быть два, три, нѣсколько лѣтъ работалъ только машинально, привыкъ къ этому, то потомъ требованіе объясненій кажется ему *излишнимъ*, такъ какъ прежде этого не требовалось, а что то такое дѣлалось, и ученики переходили изъ одного отдѣленія въ другое, изъ класса въ классъ. Сами-же дѣти, просившія объясненій, но не получившія ихъ; не довѣряя своимъ силамъ, т. е. не будучи

*) Нерѣдко можно видѣть, что такіе ученики, совершенно не понимая задачи, все-таки дѣлаютъ какія то вычисленія, сами не зная для чего ихъ дѣлаютъ, а только желая получить число, указанное въ сборникѣ; если они, производя какія нибудь дѣйствія надъ данными числами, случайно получатъ то число, которое должно получиться, то вполнѣ удовлетворяются, считаютъ, что рѣшили задачу и только съ большимъ трудомъ можно убѣдить ихъ въ ошибкѣ.

увѣрены въ правильности своихъ заключеній, скоро бросаютъ свои попытки добиться пониманія дѣла, и лишь немногіе пытливые умы сохраняютъ любознательность, не смотря на отсутствіе удовлетворенія.

Все сказанное, однакоже, нисколько не умаляетъ значенія учителя въ классѣ. Хотя онъ только выбираетъ матеріалъ и направляетъ работу, но отъ него зависитъ, какъ извѣстно, весь успѣхъ дѣла и для удачнаго направленія работы учениковъ учителю необходимо самому хорошо понимать предметъ, необходимо обдумывать свои пріемы, необходимо умѣнье понимать затрудненія дѣтей. Мы думаемъ, что къ этой работѣ надо готовиться, заранѣе опредѣляя цѣль занятій и обдумывая планъ ихъ, но вполнѣ овладѣть ею, вполнѣ понять ее можно только при личномъ опытѣ.

Если же учителю удастся достигнуть того, что ученики дѣйствительно сами составятъ опредѣленія дѣйствій, то этимъ уже будетъ достигнутъ важный результатъ: ученики *будутъ вполнѣ понимать* пройденное и въ тоже время будутъ *привыкать къ правильной умственной работѣ*, къ переходу отъ наблюденій надъ отдѣльными (частными, какъ говорятъ) случаями къ общимъ заключеніямъ или выводамъ (обобщеніямъ, какъ говорятъ). Такимъ образомъ ученики подъ руководствомъ учителя перейдутъ отъ непосредственныхъ наблюденій надъ окружающимъ къ размышленію, отъ практики къ теоріи.

Если подобная работа повторена будетъ нѣсколько разъ, то вполнѣ можно надѣяться, что ученики поймутъ ходъ работы и привыкнутъ дѣлать обобщенія и провѣрять свои заключенія. Въ подобной работѣ надобность встрѣчается, конечно, не только при занятіяхъ ариѳметикой, но и въ жизни. Школа должна учить правильно думать.

Такой ходъ занятій, при которомъ ученики сперва практически знакомятся съ предметомъ, а потомъ переходятъ къ обобщеніямъ, ими самими составляемымъ (въ данномъ случаѣ сперва знакомятся съ вычисленіями, а потомъ переходятъ къ опредѣленію ихъ)—называется эвристическимъ. Если учитель, давъ примѣры для упражненій и требуя потомъ объясненія ихъ, помогаетъ ученикамъ дѣлать выводы своими вопросами, то способъ объясненій его называютъ катехитическимъ (вопросительнымъ).

Умѣнье считать и производить дѣйствія надъ небольшими числами должно быть пріобрѣтено учениками прежде, чѣмъ они приступятъ къ объясненію и обобщенію пройденнаго; но очень можетъ быть, что ученики, съ которыми мы начинаемъ заниматься, или учились раньше, или какимъ либо другимъ путемъ еще до школы пріобрѣли умѣнье считать и производить вычисленія,—поэтому, приступая къ занятіямъ, прежде всего слѣдуетъ опредѣлить степень подготовки учениковъ, если она неизвѣстна учителю.

Чтобы узнать, затрудняются ли дѣти вычисленіями и если затрудняются, то на сколько велико ихъ затрудненіе, слѣдуетъ до начала правильныхъ занятій, вопервыхъ, прямо спросить учениковъ, учились ли они считать и что они знаютъ; вовторыхъ, слѣдуетъ предложить дѣтямъ рядъ простыхъ задачъ, чтобы видѣть: 1) могутъ ли они, дѣйствительно, дѣлать вычисленія, 2) если могутъ, то въ какомъ объемѣ, 3) могутъ ли объяснить своими словами, что надо сдѣлать съ данными числами въ каждомъ отдѣльномъ случаѣ (т. е. имѣютъ ли они представленія о дѣйствіяхъ). Дѣти, ничему не учившіеся до школы, рѣшая предложенный вопросъ, обыкновенно могутъ сказать, что одно число слѣдуетъ прибавить къ другому, или взять его нѣсколько разъ, или раздѣлить на части, т. е. имѣютъ представленія о дѣйствіяхъ, но вычисляютъ плохо *).

Если же приходится заниматься съ такими дѣтьми, которыя уже нѣсколько учились ариѳметикѣ, то не слѣдуетъ очень долго останавливаться на вычисленіяхъ и даже, быть можетъ, вовсе ненужны будутъ упражненія въ вычисленіяхъ надъ небольшими числами (если дѣти умѣютъ производить ихъ). Но на опредѣленіи того, что дѣлается съ числомъ при рѣшеніи вопроса, т. е. на выясненіи представленій о дѣйствіяхъ, во всякомъ случаѣ *необходимо остановиться*.

*) Во избѣжаніе недоразумѣній напоминаю, что подъ умѣньемъ вычислять слѣдуетъ подразумѣвать умѣнье безъ затрудненія производить всѣ дѣйствія надъ числами, хотя бы лишь до извѣстнаго предѣла, а не умѣнье считать. Учителю въ первое время необходимо принаравливаться только къ знаніямъ слабѣйшихъ учениковъ, иначе разница въ знаніяхъ будетъ быстро возрастать съ самаго начала занятій, а вмѣстѣ съ тѣмъ все труднѣе и труднѣе будетъ занимать весь классъ одной и той же работой. Отставшіе ученики обыкновенно совсѣмъ перестаютъ работать, привыкаютъ не слушать учителя и вообще небрежно относиться къ дѣлу, пріобрѣтаютъ и другія дурныя привычки. Къ со-

Правильное пониманіе дѣйствій есть правильное пониманіе теоріи ариѳметики, тогда какъ умѣнье производить вычисленія нужно для практической цѣли—нахожденія числа и для того, чтобы, умѣя произвести дѣйствіе, ученикъ могъ обратить вниманіе и на смыслъ дѣйствія.

Практическаго навыка во всякомъ дѣлѣ недостаточно; для правильнаго пониманія дѣла необходима теорія,—поэтому при обученіи дѣтей необходимо познакомить ихъ съ тѣмъ, какъ вырабатывается теорія и какое важное значеніе она имѣетъ. Но нѣтъ такого предмета, теорія котораго была бы проще, яснѣе и лучше выработана, чѣмъ теорія ариѳметики.

Это приводитъ къ мысли, что при обученіи ариѳметикѣ необходимо придать ей то учебное значеніе, которое она имѣетъ по своему содержанію. Опредѣленность ариѳметической теоріи объясняетъ и сравнительно большую успѣшность преподаванія этого предмета. Опредѣленность содержанія позволяетъ ученикамъ легче замѣтить и понять сущность ариѳметики, гораздо легче, чѣмъ сущность другихъ предметовъ. Если же большая опредѣленность содержанія учебнаго предмета, т. е. большая ясность теоріи его, облегчаетъ усвоеніе предмета, то значитъ теорія дѣйствительно необходима для пониманія дѣла. Что ариѳметика въ большинствѣ школъ „идетъ лучше", чѣмъ другіе предметы—я думаю признаетъ огромное большинство учителей, особенно классныхъ учителей, т. е. преподающихъ въ своемъ классѣ всѣ предметы курса.

Предупреждаемъ читателя, что высказываемые здѣсь взгляды на преподаваніе ариѳметики приводятъ къ признанію за такъ называемымъ „изученіемъ чиселъ" лишь второстепеннаго значенія, тогда какъ обыкновенно это „изученіе чиселъ" составляетъ содержаніе всѣхъ первоначальныхъ упражненій по ариѳметикѣ, въ

---

жалѣнію, вполнѣ избѣжать указаннаго зла невозможно: силы учениковъ всегда различны и нѣкоторые изъ нихъ всегда успѣваютъ гораздо больше другихъ. Задерживать же въ занятіяхъ весь классъ ради самыхъ слабыхъ учениковъ—еще вреднѣе, такъ какъ тогда *большинство* учениковъ будетъ пріобрѣтать указанныя выше дурныя привычки, будетъ скучать и мало пріобрѣтетъ знаній. Учителю приходится принаравливать курсъ къ *среднимъ* ученикамъ, всегда составляющимъ большинство класса, стараясь дать сильнѣйшимъ еще особую работу, а слабыхъ—хотя отчасти привлечь къ работѣ).

продолженіи отъ 1—2 лѣтъ. Конечная цѣль подобныхъ упражненій—„знакомство съ числами“, т. е. умѣнье производить вычисленія. Я считаю подобную постановку дѣла искажающею характеръ предмета, потому что въ этомъ случаѣ средство ознакомленія съ предметомъ (ариѳметикой) смѣшивается съ цѣлью занятій.

Предыдущія разсужденія приводятъ къ заключенію, что при преподаваніи *ариѳметики, какъ для усвоенія ея собственно, такъ и для достиженія возможно болѣе правильнаго общаго развитія, необходимо особенно заботиться о выработкѣ теоріи предмета, а для этой цѣли съ самаго начала необходимо обратить особенное вниманіе на дѣйствія.*

Въ сельской школѣ, конечно, не придется выработать теорію ариѳметики вполнѣ, но и тамъ она должна быть хоть отчасти выработана, и тамъ необходимо обращать на нее вниманіе, если хотимъ доказать полезность ученья, хотимъ пріучить ученика давать самому себѣ отчетъ въ томъ, что дѣлаетъ, если хотимъ развить умственныя силы учащагося и пріучить его къ правильной работѣ, а слѣдовательно и принести ему практическую пользу. Нужно позаботиться только, чтобы данныя объясненія были *дѣйствительно усвоены* учащимися, чтобы практическіе примѣры выяснили дѣло. Какая польза будетъ отъ школы, если ученикъ выучиться въ ней только считать! Всякій человѣкъ можетъ выучиться считать и безъ школы, а занимающійся торговлей всегда отлично считаетъ. Школа должна дать больше. Научивъ счету, она должна заставить вдуматься въ дѣлаемыя вычисленія и этимъ подѣйствовать на ученика, вызвать къ дѣятельности его душу. Тогда только вліяніе школы будетъ прочно.

Въ народной школѣ во всякомъ случаѣ возможно хорошо познакомить съ 4 дѣйствіями и объяснить ихъ смыслъ, т. е. можно дать основательное знаніе, если и не всего предмета, то всетаки самостоятельной и притомъ основной его части. Съ своей стороны я думаю однако, что въ народной школѣ *возможно* и безусловно *необходимо* не ограничиваться вычисленіями надъ цѣлыми числами, но слѣдуетъ познакомить дѣтей и съ вычисленіями надъ дробями, по крайней мѣрѣ простѣйшими, распространяя понятія о дѣйствіяхъ и на дроби. Это необходимо уже по одному тому, что вычисленія съ дробями встрѣчаются на каждомъ шагу при самыхъ простыхъ,

обыденныхъ вычисленіяхъ; всякій бывшій ученикъ школы долженъ испытывать чувство неудовлетворенности, недовольства школой, если не можетъ сдѣлать такого вычисленія, которое понятно многимъ, вовсе неучившимся. Съ другой стороны это необходимо и съ теоретической точки зрѣнія, необходимо для усвоенія правильныхъ понятій о дѣйствіяхъ, такъ какъ всякія понятія разъясняются при сравненіи различныхъ случаевъ. Серьезныхъ практическихъ затрудненій введенію въ курсъ ариѳметики вычисленій съ дробями, если только есть время для усвоенія 4 дѣйствій надъ цѣлыми числами—не встрѣтится, какъ будетъ объяснено ниже. Объясненія теоріи дѣйствій надъ дробями въ народной школѣ при нынѣшнихъ ея условіяхъ (курсъ продолжается 3 короткихъ зимы), конечно, невозможно дать; но въ тѣхъ школахъ, гдѣ обученіе продолжается болѣе значительное время (напр. въ городскихъ училищахъ Мин. Нар. Пр.) объясненіе дѣйствій надъ дробями непремѣнно должно быть дано. Во всякой школѣ, я думаю, лучше ограничить количество предметовъ, но зато придать большую законченность курсу по остальнымъ предметамъ. Всякой работѣ лучше можно выучиться, сдѣлавъ одну большую работу, доведя ее до конца, чѣмъ начавъ множество работъ, но ни одну не докончивъ.

Въ дополненіе къ высказанному выше положенію относительно преподаванія ариѳметики, теперь слѣдуетъ прибавить, что *во всякой школѣ необходимо познакомить и съ дѣйствіями надъ дробями, хотя съ простѣйшими случаями, даже и тогда, если потомъ не придется дать полнаго объясненія производства дѣйствій надъ дробями*.

Изъ предыдущаго вытекаютъ еще и другія два положенія относительно преподаванія ариѳметики. Для достиженія цѣли (усвоенія впослѣдствіи теоріи и пріобрѣтенія навыка въ умственной работѣ) *нужно, чтобы теорія не излагалась ученикамъ и не предшествовала практическимъ упражненіямъ, а чтобы, наоборотъ, теорія постепенно вырабатывалась учениками и представляла собою рядъ выводовъ изъ практическихъ упражненій въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ*.

Учениками постепенно должны быть выведены всѣ понятія, входящія въ кругъ ариѳметической теоріи (они перечислены въ началѣ главы), и притомъ каждое изъ нихъ должно быть подготовлено

практическими упражненіями, выбранными или составленными съ заранѣе обдуманнымъ намѣреніемъ. Одно понятіе опредѣляется, другія подготовляются. Однакоже умѣнье производить вычисленія всегда должно быть средствомъ подготовленія къ усвоенію теоріи предмета и ни въ какомъ случаѣ не должно само по себѣ составлять цѣли занятій.

Третье положеніе: *первоначальныя упражненія необходимо ограничивать небольшими числами, чтобы дать возможность ученикамъ не затрудняться вычисленіями и сосредоточить все свое вниманіе на пониманіи смысла дѣлаемыхъ имъ вычисленій.*

Если ученики очень затрудняются вычисленіями, то необходимо ограничиться сперва числами перваго десятка, а для большей отчетливости и доступности занятій останавливаться даже на отдѣльныхъ числахъ. Если приходится останавливаться на отдѣльныхъ числахъ, т. е., если ученики прежде очень мало вычисляли и не могутъ находить результатовъ дѣйствій, то упражненія въ вычисленіяхъ должны идти при помощи наглядныхъ пособій, чтобы дѣйствіе, производимое надъ числами, и окончательный результатъ непосредственно *наблюдались* учениками. Тогда только они ясно поймутъ, что происходитъ съ числомъ (представятъ себѣ происходящее дѣйствіе) и какъ получается новое число. Если мы не воспользуемся наглядными пособіями, то первое время повидимому даже не встрѣтится накакихъ затрудненій въ занятіяхъ, но сдѣланный промахъ дастъ себя почувствовать впослѣдствіи; если ученики не получатъ съ самаго начала вполнѣ ясныхъ представленій о дѣйствіяхъ (нагляднымъ путемъ), то впослѣдствіи, при переходѣ къ болѣе отвлеченнымъ и сложнымъ объясненіямъ, путаются въ объясненіяхъ и стараются взять памятью. Ясно понимая въ чемъ дѣло, ученикъ всегда сумѣетъ своими словами высказать объясненіе.

Но разумѣется, если ученики, съ которыми мы начинаемъ заниматься, люди взрослые, или покрайней мѣрѣ настолько развиты, что вполнѣ хорошо понимаютъ смыслъ дѣйствія и понимаютъ, какъ получилось новое число, то въ наглядномъ объясненіи дѣйствій и въ показаніи результата ихъ вовсе нѣтъ надобности. Маленькія дѣти, не учившіеся ариѳметикѣ, обыкновенно не могутъ ни ясно представить себѣ способа образованія новаго числа изъ данныхъ (дѣйствія), ни найти результатъ (сосчитать) безъ помощи пособій.

Важно, чтобы они начали занятія личными наблюденіями; тогда они смогутъ и выводы сдѣлать правильно. Во всякомъ случаѣ наглядныя пособія должны быть употребляемы не для того, чтобы всегда по нимъ производить счетъ, а для того, чтобы, показавъ на нихъ дѣйствія и результаты дѣйствій, можно было перейти *къ сознательнымъ вычисленіямъ безъ пособій*. Но если встрѣтится затрудненіе въ вычисленіяхъ въ то время, когда мы уже оставили наглядныя пособія, а дѣйствія производятся еще только надъ небольшими числами, то слѣдуетъ воспользоваться опять наглядными пособіями для разъясненія встрѣтившагося затрудненія.

Предлагая въ первое время самыя простыя упражненія, ограничивая вычисленія очень маленькими числами, мы не должны забывать главной цѣли—*ознакомленія учащихся съ цѣлымъ предметомъ*. Это чрезвычайно важно, потому что, обративъ вниманіе учениковъ на сущность дѣла, мы дадимъ имъ руководящую нить во всѣхъ занятіяхъ, поможемъ понять даваемыя объясненія болѣе глубоко, поможемъ замѣтить тѣсную связь между ними и пріучимъ постоянно обращать вниманіе на эту связь, а слѣдовательно можемъ не допустить развитія привычки къ заучиванію каждаго упражненія независимо отъ другихъ. Конечно, не все можетъ быть *объяснено* ученику съ самаго начала, но этого вовсе и не нужно: совершенно достаточно, если ученикъ будетъ знакомиться наглядно *и одновременно со всѣми 4 дѣйствіями* (какъ основными вычисленіями). Тогда онъ невольно будетъ сравнивать дѣйствія между собою помимо всякихъ объясненій учителя, а это-то сравненіе и нужно, потому что только путемъ сравненія выясняются наши понятія о предметахъ. (Даже для объясненія того, насколько полезенъ, пріятенъ, красивъ описываемый предметъ, мы обыкновенно прибѣгаемъ къ сравненіямъ).

Повторяю, что нужно *не объяснять* всѣ дѣйствія въ одно время, но *практически ознакомить* со всѣми одновременно. (Пусть ученики сами наблюдаютъ, потомъ дойдетъ дѣло и до обобщеній). Чѣмъ меньше дѣти, тѣмъ необходимѣе для нихъ сравненіе различныхъ случаевъ для образованія правильныхъ понятій и предупрежденія ошибокъ (ложныхъ заключеній) только изъ за того, что вниманіе обращено лишь на нѣкоторыя односторонніе случаи (объ этомъ говорилось на стр. 17—19).

Преподавателю, читающему эту книгу, конечно представится вопросъ: если занятія первоначально должны ограничиваться небольшими числами, то сколько времени должны происходить подобныя практическія упражненія? Отвѣтить на это—нетрудно. Цѣль упражненій съ небольшими числами—обратить вниманіе на смыслъ дѣйствій, производя ихъ надъ такими числами, которыя не затрудняютъ учащихся; слѣдовательно, необходимо добиться того, чтобы ученики могли совершенно свободно вычислять, правильно объяснять своими словами, что они дѣлаютъ съ числомъ и, наконецъ, умѣли бы и письменно выразить извѣстнымъ знакомъ, какое дѣйствіе было ими произведено. Для дальнѣйшихъ же занятій ариѳметикой необходимо, чтобы каждый ученикъ твердо зналъ результаты сложенія и умноженія однозначныхъ чиселъ, вычитанія однозначныхъ изъ одно-и двузначныхъ (такъ какъ суммы однозначныхъ чиселъ доходятъ до $9+9=18$) и результаты дѣленія одно-и двузначныхъ чиселъ на однозначное (наибольшее произведеніе однозначныхъ чиселъ: $9\times9=81$). Ученикъ долженъ знать на память результаты дѣйствій въ показанныхъ предѣлахъ, потому что дѣйствія надъ числами многозначными всегда сводятся на дѣйствія съ однозначными, а послѣднія въ дѣйствительности не производятся: результаты ихъ пишутся на память. (Мы, напримѣръ, говоримъ: $7\times8=56$ на память, не производя вычисленія).

Если же результаты дѣйствій надъ числами первой сотни должны быть усвоены на память, то понятно, что за предѣлы чиселъ первой сотни не слѣдуетъ переходить до тѣхъ поръ, пока указанныя выше цѣли не будутъ достигнуты. Но изучать каждое число въ отдѣльности, т. е. продѣлывать всѣ дѣйствія надъ каждымъ числомъ по порядку, вовсе нѣтъ надобности до такого предѣла; обыкновенно бываетъ достаточно (по мнѣнію многихъ учителей) пройти отъ 10 до 20 чиселъ, а потомъ увеличивать величину чиселъ, вводимыхъ въ вычисленія, разомъ на десятокъ и не останавливаясь исключительно на числахъ этого десятка, но вводя въ вычисленія всѣ числа отъ 1 до того предѣла, до котораго дошли. Со способными учениками такая осторожность въ увеличеніи чиселъ, входящихъ въ вычисленія, можетъ быть излишня, но при классныхъ занятіяхъ она необходима, иначе малоспособные ученики не будутъ въ состояніи отчетливо усвоить

способъ полученія тѣхъ результатовъ дѣйствій, которые должны быть заучены, и съ первыхъ шаговъ будутъ стараться брать памятью, а не соображеніемъ

Къ этому я еще прибавлю, что для ясности пониманія всѣхъ производимыхъ вычисленій, дѣти должны привыкать и къ различенію разностнаго и кратнаго отношеній чиселъ. (На сколько одно число больше другого и во сколько разъ одно больше другого). Дѣти постоянно смѣшиваютъ эти отношенія между собою и потому затрудняются въ пониманіи и рѣшеніи задачъ, такъ какъ эти отношенія играютъ роль во всякаго рода вопросахъ. (Ниже будетъ сказано, какъ все это можно сдѣлать).

Наконецъ, ученики, производя вычисленія надъ числами первой сотни, должны привыкнуть къ примѣненію основныхъ законовъ производства дѣйствій, а именно къ тому, 1) что дѣйствія производятся по разрядамъ (надъ единицами каждаго разряда особо; напр., складываютъ сперва единицы между собою, потомъ десятки и т. д.), и 2) что результаты дѣйствій надъ единицами каждаго изъ разрядовъ должны быть соединены въ одинъ общій результатъ. (Напримѣръ, складывая $37+46$, получаемъ; $7+6=13$ и $30+40=70$, а $13+70=83$, или $24\times3=20\times3$ и $4\times3$; $20\times3=60$, $4\times3=12$, а $60+12=72$).

Говоря о томъ, что должно быть сдѣлано во время упражненій съ числами первой сотни, я постоянно имѣю въ виду лишь практическія упражненія, но не опредѣленія, предложеніе примѣровъ и объясненіе ихъ со стороны учениковъ обыкновеннымъ разговорнымъ языкомъ (своими словами), требованіе непосредственныхъ наблюденій и пониманія дѣла, а не заучиванія словъ.

Разница между тѣмъ и другимъ значительная. Говоря объ одномъ какомъ нибудь примѣрѣ (о частномъ случаѣ), ученикъ всегда сумѣетъ объяснить, въ чемъ дѣло; замѣтить-же общіе признаки всѣхъ случаевъ и говорить о всѣхъ нихъ разомъ, а не объ одномъ какомъ-нибудь онъ еще не можетъ (не составилъ себѣ *понятія* о всѣхъ подобныхъ примѣрахъ). Насколько велика разница между той и другой формой объясненія, видно уже изъ того, что всякій ученикъ, говоря о недавно объясненномъ дѣйствіи, никогда почти не можетъ разсказать усвоеннаго, не ссылаясь на какой нибудь примѣръ.

Теперь можно высказать четвертое положеніе: *во время упражненій съ числами первой сотни ученики должны познакомиться непремѣнно со всѣми четырьмя дѣйствіями одновременно и кромѣ того должны усвоить различіе между разностнымъ и кратнымъ отношеніями*.

Къ этому присоединяемъ еще пятое и шестое положенія: 5) *во время упражненій съ числами первой сотни не слѣдуетъ давать опредѣленій;* 6) *представленія о дѣйствіяхъ должны быть усвоены нагляднымъ путемъ*. Если ученики имѣютъ уже подготовку, то очень можетъ быть, что упомянутыя упражненія не будутъ нужны, но всегда должно быть провѣрено, усвоены-ли учениками тѣ результаты, ради достиженія которыхъ предлагаются всѣ эти упражненія.

Я постоянно говорю, что ученики, проходя курсъ ариѳметики, главнымъ образомъ должны познакомиться съ ея теоріей и понять важное значеніе теоріи для пониманія всякаго дѣла. Такъ какъ теорія объясняетъ пройденное, то она всегда интересуетъ учениковъ, если только изложена въ доступной для нихъ формѣ. Отсутствіе теоріи всегда дурно вліяетъ на учащихся; они утомляются отъ длиннаго ряда упражненій, значеніе которыхъ имъ непонятно, и должны употреблять большія усилія, чтобы запомнить всѣ эти упражненія, если теорія ихъ объяснена не будетъ. Но для полнаго усвоенія теоріи всегда необходимо самому примѣнять ее на практикѣ. Какъ бы ни было хорошо понято учениками данное объясненіе (напримѣръ, понятія о дѣйствіи, производства дѣйствія и т. п.), при переходѣ къ отдѣльнымъ (частнымъ) разнообразнымъ случаямъ ученики всегда встрѣчаютъ затрудненія; учитель обыкновенно долженъ предлагать очень много разнообразныхъ примѣровъ, требующихъ примѣненія усвоенныхъ учениками теоретическихъ знаній, чтобы дать возможность учащимся *выработать умѣнье* прилагать свое знаніе къ дѣлу, умѣнье побѣждать встрѣчающіяся затрудненія. Въ ариѳметикѣ, понятно, такіе частные случаи, вызывающіе затрудненія, встрѣчаются при вычисленіяхъ и при рѣшеніи задачъ. Задачи, притомъ, играютъ особенно важную роль, такъ какъ при рѣшеніи задачъ встрѣчаются затрудненія болѣе разнообразныя и даже всякаго рода затрудненія: вычисленіямъ всегда можно придать форму задачъ, и такая форма упражненій въ вычисленіяхъ даетъ возможность придать занятіямъ большую

степень живости. Это показываетъ, что упражненія въ рѣшеніи задачъ должны постоянно слѣдовать за всякими теоретическими объясненіями, а не только предшествовать имъ (о чемъ уже говорилось раньше). Упражненія въ рѣшеніи задачъ должны помочь ученикамъ усвоить какъ самый процессъ вычисленій, такъ и умѣнье опредѣлять, какое дѣйствіе слѣдуетъ сдѣлать, если соотношеніе данныхъ задачи указано (т. е. задача не замысловата; тогда достаточно понимать дѣйствія, чтобы опредѣлить, какое изъ нихъ нужно сдѣлать). Задачи, кромѣ того, имѣютъ значеніе въ курсѣ ариѳметики какъ средство для развитія въ дѣтяхъ соображенія, т. е. умѣнья подмѣтить соотношенія данныхъ задачи, хотя бы они и не были прямо указаны въ условіи, и, пользуясь ими, опредѣлить, въ какомъ порядкѣ и надъ какими данными должны быть произведены извѣстныя дѣйствія для рѣшенія задачи. (Сложная задача разбивается такимъ образомъ на рядъ простыхъ, рѣшаемыхъ каждая однимъ дѣйствіемъ; когда мы не можемъ рѣшить задачу, то именно не можемъ разбить ее на рядъ простыхъ задачъ).

Развивать въ дѣтяхъ сообразительность, конечно, необходимо съ перваго же года обученія, но только изрѣдка останавливаясь на подобныхъ упражненіяхъ въ первое время, потому что прежде всего необходимо твердо установить пониманіе основаній предмета. Если я совѣтую всетаки обратить вниманіе на задачи, требующія догадливости, въ первый же годъ, то потому, что подобныя упражненія могутъ много способствовать оживленію классныхъ занятій, такъ какъ поражаютъ дѣтей, а черезъ это возбуждаютъ въ нихъ энергію, желаніе побѣдить препятствіе. Умѣнье побѣждать встрѣчающіяся препятствія очень драгоцѣнно, а пріобрѣтается оно только въ томъ случаѣ, если будутъ представляться случаи встрѣчать затрудненія въ работѣ и побѣждать ихъ. Такая работа драгоцѣнна не только по отношенію къ развитію умѣнья работать самостоятельно, но и для развитія характера, т. е. твердости въ стремленіи къ своей цѣли, настойчивости въ трудѣ *).

*) Разумѣется, не слѣдуетъ думать, что рѣшеніе задачъ или какія нибудь другія, отдѣльно взятыя занятія въ этомъ отношеніи имѣютъ очень большое значеніе; но во время школьной жизни всякій ребенокъ живетъ по преимуществу школьными интересами и школьной работой, поэтому школа имѣетъ очень большое вліяніе и на характеръ, тѣмъ болѣе, что вліяніе школы продолжается нѣсколько лѣтъ.

Если-же на рѣшеніе задачъ, требующихъ большихъ усилій отъ учениковъ, будетъ удѣлено много времени, то легко можетъ быть, что вліяніе ихъ будетъ совершенно противуположное. Много занимаясь рѣшеніемъ трудныхъ задачъ, учитель не дастъ возможности ученикамъ основательно усвоить предметъ, а потому не выяснитъ и значенія теоріи, но пріучитъ всегда дѣйствовать по догадкѣ, придавать значеніе только смѣтливости, пренебрегая правильной работой. Занимаясь много рѣшеніемъ трудныхъ задачъ, учитель по необходимости будетъ требовать постоянно усиленной работы, напряженія, а это легко можетъ убить энергію, потому что истощитъ еще слабыя силы ребенка. (Подобное же значеніе имѣютъ и теоретическія объясненія).

О томъ, какъ вести упражненія въ рѣшеніи задачъ, ниже будетъ сказано подробно. Теперь замѣчу только, что для большей оживленности занятій при рѣшеніи задачъ въ первое время полезно относить задачи не къ отвлеченнымъ числамъ, а къ именованнымъ; послѣднія болѣе привычны дѣтямъ, больше говорятъ ихъ воображенію, а потому и задачи будутъ легче и интереснѣе. При употребленіи именованныхъ чиселъ легче достигнуть разнообразія въ условіяхъ задачъ и скорѣе можно будетъ покинуть употребленіе наглядныхъ пособій, что во всякомъ случаѣ должно составлять цѣль занятій. Но пріучать учащихся къ употребленію отвлеченныхъ чиселъ и къ рѣшенію задачъ съ отвлеченными данными всетаки непремѣнно слѣдуетъ: безъ этого дѣтямъ трудно будетъ понять теорію предмета. Употребленіе именованныхъ чиселъ— первая переходная ступень отъ наблюденія къ обобщенію; употребленіе отвлеченныхъ чиселъ—вторая ступень, а самый выводъ— послѣдняя.

Итакъ, мы пришли къ новымъ еще заключеніямъ. (Седьмому и восьмому). *Занятія ариѳметикой должны постоянно сопровождаться рѣшеніемъ задачъ, какъ для развитія навыка въ вычисленіи, такъ и для выясненія теоріи и, наконецъ, для розвитія сообразительности.* (Восьмое). *Въ теоретическихъ и практическихъ упражненіяхъ должна быть соблюдаема строгая соразмѣрность.* Нужно стараться никогда не оставлять учениковъ безъ объясненія того, что они проходили, но вмѣстѣ съ тѣмъ необходимо давать достаточное количество упражненій по каждому отдѣлу, чтобы уче-

ники, прилагая свои знанія къ практическимъ примѣрамъ, могли вполнѣ сознательно усвоить пройденное.

Инымъ можетъ показаться, что напрасно говоримъ мы о необходимости соотвѣтствія между теоретическими и практическими занятіями, что это каждому извѣстно. Но на практикѣ самые обыкновенные недостатки учителей, особенно начинающихъ—именно увлеченіе одной стороной дѣла. Одни даютъ дѣтямъ слишкомъ много объясненій и, требуя знанія ихъ отъ учениковъ, незамѣтно для себя заставляютъ учащихся заучивать пройденное. Другіе, занимая дѣтей все практическими упражненіями и не давая имъ никакихъ объясненій, пріучаютъ къ пустой работѣ и къ исполненію ея безъ пониманія, т. е. также заставляютъ работать только памятью, хотя въ этомъ случаѣ заучиваются не теоретическія объясненія, а практическіе примѣры. Ученики, разумѣется, при тѣхъ и другихъ условіяхъ развиваются мало. Впрочемъ, заучиваніе теоріи всетаки полезнѣе, потому что теорія сама по себѣ имѣетъ развивающее вліяніе; усваивая послѣдовательное изложеніе извѣстнаго ряда мыслей, всякій человѣкъ нѣсколько пріучается послѣдовательно думать, подражая данному образцу. Начинающіе учителя обыкновенно предполагаютъ, что ученики легко усваиваютъ ихъ объясненія, разъ понявъ, удерживаютъ ихъ въ памяти и безъ затрудненія могутъ прилагать ихъ къ различнымъ частнымъ случаямъ—чего обыкновенно ученики не могутъ дѣлать. Въ результатѣ почти всегда оказывается, что учитель слишкомъ высоко цѣнилъ силы учащихся, а потому прошелъ больше, чѣмъ бы слѣдовало, и только въ концѣ года замѣчаетъ, насколько неудовлетворительно знаютъ ученики все пройденное.

Я думаю, что для начинающаго учителя будетъ полезенъ слѣдующій совѣтъ. Чтобы достигнуть равномѣрности въ теоретическихъ и практическихъ занятіяхъ, примите себѣ за правило: каждую недѣлю непремѣнно объяснить что нибудь дѣтямъ, посвящая на это одинъ изъ недѣльныхъ уроковъ, а остальные (3—4 ур.) посвящая на практическія упражненія въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ. Разумѣется, если стоящія на очереди объясненія не могутъ быть закончены въ одинъ урокъ, то на теоретическія занятія слѣдуетъ посвятить не одинъ, а два, три урока, чтобы закончить объясненіе. Сообщая каждую недѣлю что-нибудь новое,

мы въ продолженіи года незамѣтно пройдемъ многое и легче избѣжимъ увлеченія какой-нибудь одной стороной дѣла.

Количество упражненій по каждому отдѣлу должно быть очень велико, потому что ученики должны не только понять показанныя вычисленія и объясненія, но еще должны привыкнуть пользоваться ими, должны усовершенствоваться въ вычисленіяхъ, должны усвоить *пріемы* вычисленій *). Упражненія въ вычисленіяхъ должны быть какъ письменныя, такъ и устныя. Не умѣя вычислять въ умѣ, дѣти не могутъ быстро вычислять и письменно, что очень мѣшаетъ занятіямъ, заставляя терять много времени даромъ, мѣшаетъ и развитію сообразительности въ дѣтяхъ; недостатокъ навыка считать въ умѣ представляетъ неудобство и въ жизни; необходимо много считать въ умѣ и для того, чтобы усвоить пріемы вычисленій и понять ихъ необходимость. Навыкъ въ производствѣ письменныхъ вычисленій необходимъ потому, что большія вычисленія всегда лучше вести на бумагѣ: удобнѣе и провѣрить можно. Въ учебномъ-же отношеніи письменныя вычисленія важны потому, что заставляютъ ученика дать себѣ отчетъ въ томъ, что онъ дѣлаетъ съ числами (тогда только можетъ онъ написать вычисленіе), а слѣдовательно письменныя вычисленія помогаютъ дѣтямъ усвоить пройденное. Учителю-же они даютъ возможность точнѣе судить о пониманіи дѣла *каждымъ* учащимся въ отдѣльности и кромѣ того даютъ возможность назначать самостоятельныя работы дѣтямъ, какъ въ классѣ, такъ и на домъ. Умственныя вычисленія, какъ болѣе легкія, должны предшествовать того-же рода письменнымъ вычисленіямъ; другими словами, записываются только такія, которыя уже поняты и усвоены при умственныхъ упражненіяхъ. Умственныя вычисленія должны предшедствовать и потому, что они идутъ живѣе письменныхъ. Во всякомъ случаѣ какъ устныя, такъ и письменныя вычисленія должны продолжаться во все время занятій.

*) Подъ пріемами вычисленій слѣдуетъ подразумѣвать раздѣленіе чиселъ при производствѣ надъ ними дѣйствій на разряды или какія-нибудь другія части и тѣ небольшія измѣненія данныхъ чиселъ, которыя дѣлаются для „закругленія“ ихъ ради удобства вычисленій, такъ какъ дѣлаемая при этомъ ошибка въ вычисленіи легко можетъ быть исправлена, а самое вычисленіе идетъ гораздо быстрѣе. Вмѣсто умноженія, напримѣръ, даннаго числа на 98, вычисляя въ умѣ, всегда умножаютъ на 100, а потомъ отнимаютъ два раза взятое даное число и т. п.

Все пройденное, даже хорошо усвоенное учениками легко забывается ими, поэтому необходимы частыя повторенія пройденнаго (особенно при занятіяхъ съ маленькими дѣтьми). Но такъ какъ во время занятій съ числами первой сотни ученики только практически знакомятся съ 4 дѣйствіями, которыя постоянно повторяются, и запоминаютъ результаты дѣйствій надъ числами первой сотни, то назначать особые уроки на повтореніе въ это время нѣтъ надобности. Для лучшаго усвоенія результатовъ дѣйствій полезно составлять таблицы такихъ результатовъ. (Таблицы сложенія и умноженія). Подробнѣе объ этомъ будетъ сказано тогда, когда перейдемъ къ указанію подробностей выполненія предлагаемаго учебнаго плана.

---

# ГЛАВА ВТОРАЯ.

## Планъ курса ариѳметики.

Высказанныя въ предыдущей главѣ основныя положенія метода приводятъ къ прямому заключенію, что курсъ ариѳметики долженъ начинаться съ такъ называемаго „изученія чиселъ первой сотни", т. е. упражненіями въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ съ небольшими числами, безъ сообщенія опредѣленій.

Что-же должно дать дѣтямъ знакомство съ числами первой сотни? Практическое знакомство со всѣмъ предметомъ, отвѣтимъ мы, напоминая основную нашу мысль, высказанную въ началѣ предыдущей главы. Это значитъ, что ученики должны быть наглядно ознакомлены съ каждымъ изъ четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій, должны умѣть быстро производить эти дѣйствія надъ числами первой сотни, а въ простѣйшихъ случаяхъ даже и надъ дробями съ небольшими числителями и знаменателями, должны знать пріемы вычисленій, должны умѣть рѣшать несложныя задачи и объяснять ходъ рѣшенія ихъ, должны умѣть записать тѣ вычисленія, которыя дѣлаются ими въ умѣ, записать въ надлежащемъ порядкѣ. Наконецъ, ученики должны быть знакомы съ разностнымъ и кратнымъ отношеніями чиселъ.

Все это должно быть усвоено настолько сознательно, чтобы ученикъ могъ „почувствовать свое знаніе", пріобрѣлъ въ немъ полную увѣренность.

Для учителя весьма важно опредѣлить тѣ признаки, по которымъ можно судить объ усвоеніи учениками всего пройденнаго. Увѣренность дѣтей въ своихъ отвѣтахъ—одинъ изъ первыхъ признаковъ знанія; быстрота отвѣтовъ, разумѣется, отвѣтовъ вѣрныхъ—другой признакъ; желаніе ученика обойтись безъ посторонней помощи и даже просьбы не помогать ему, если учитель начинаетъ объяснять—третій и одинъ изъ вѣрнѣйшихъ признаковъ пониманія дѣла учениками, хотя-бы въ данную минуту они и затруднились отвѣтомъ. Для повѣрки знаній учениковъ при помощи этого третьяго признака весьма полезно давать въ классѣ письменную работу: если каждый ученикъ видимо желаетъ сдѣлать ее самъ, не заглядывая къ сосѣдямъ, и спѣшитъ приняться за нее, причемъ исполнитъ работу хорошо, то, нѣтъ сомнѣнія, онъ понялъ пройденное. Чѣмъ свободнѣе придумываетъ ученикъ форму устнаго отвѣта—тѣмъ лучше, значитъ, понимаетъ онъ высказываемое. Важнымъ признакомъ можетъ служить также умѣнье ученика отвѣтить на вопросы не только своего учителя, но и другихъ лицъ, хотя, надо сказать, неумѣнье ученика отвѣтить на вопросы посторонихъ лицъ никогда не можетъ служить вѣрнымъ признакомъ его незнанія. Степень оживленія учащихся во время уроковъ тоже можетъ отчасти показать учителю, понимаютъ-ли его дѣти или нѣтъ. Когда ученики все хорошо понимаютъ, большинство ихъ слушаетъ учителя и притомъ слушаетъ съ выраженіемъ спокойнаго вниманія на лицахъ; когда ученики многаго не понимаютъ въ объясненіяхъ учителя, у нихъ дѣлается безпокойный, растерянный видъ; если-же они совсѣмъ не понимаютъ, что имъ говорятъ, то бываютъ или просто невнимательны, или занимаются насмѣшками и шалостями. Однимъ словомъ, чѣмъ яснѣе понимаютъ дѣти учителя, тѣмъ болѣе дѣятельное принимаютъ они участіе въ урокѣ.

Такое-же невниманіе, особенно въ послѣдней формѣ, обнаруживается и въ тѣхъ случаяхъ, когда учитель даетъ ужъ черезъчуръ легкую работу; шаловливы дѣлаются въ такомъ случаѣ преимущественно хорошіе ученики, слабые-же вызываются на отвѣты, будучи довольны, что и они могутъ отвѣтить. Если-же учитель „объясняетъ непонятно", т. е. даетъ слишкомъ трудную работу, то невнимательны преимущественно болѣе слабые ученики.

При прохожденіи ариѳметики собственно, пониманіе учащимися

пройденнаго по теоріи при ознакомленіи ихъ съ числами первой сотни выражается умѣньемъ дѣтей дать всегда точное объясненіе того, *что* дѣлаютъ они съ числами и *для чего* дѣлаютъ это, а также умѣньемъ записать сдѣланныя вычисленія. Чѣмъ свободнѣе даются устные и письменные отвѣты—тѣмъ тверже пріобрѣтенныя знанія. Пониманіе задачи и ея рѣшенія выражается умѣньемъ не только легко повторить высказанное рѣшеніе, но и сдѣлать въ немъ нѣкоторыя измѣненія или предложить совсѣмъ новое рѣшеніе, наконецъ, умѣньемъ повѣрить рѣшеніе задачи.

Я упомянулъ здѣсь только о повтореніи рѣшенія задачъ, такъ какъ рѣшеніе новой задачи можетъ не удаться ученикамъ по случайнымъ причинамъ. Впрочемъ, такую задачу, которая походитъ на рѣшавшіяся прежде, ученики, всегда должны рѣшить.

При хорошемъ усвоеніи той части курса ариѳметики, о которой теперь идетъ рѣчь, отчетливость въ пониманіи смысла дѣйствій должна дойти до того, чтобы ученики, безъ всякихъ объясненій со стороны учителя, могли-бы распространить понятія о дѣйствіяхъ на простѣйшіе случаи вычисленій съ дробями, т. е. могли-бы сосчитать, сколько получится, если возьмемъ нѣсколько разъ по половинѣ или по четверти, или по одной трети и т. д., могли-бы сказать сколько получится, если $^1/_2$ раздѣлимъ еще пополамъ, или могли-бы сосчитать, сколько разъ данная дробь, напримѣръ половина, заключается въ двухъ или въ другомъ небольшомъ цѣломъ числѣ, могли-бы прибавить или отнять половину, или какую нибудь другую простѣйшую дробь отъ цѣлаго числа, исключить цѣлое число изъ дроби, обратить несложное смѣшанное число въ неправильную дробь и т. п. Говоря объ основныхъ положеніяхъ метода преподаванія, я уже имѣлъ случай объяснить необходимость знакомства съ дробями въ самомъ началѣ зянятій ариѳметикой, поэтому теперь я прибавлю только, что указанное распространеніе понятій о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами на дѣйствія съ дробями, хотя и первыя понятія не были еще опредѣлены и формулированы, никогда не затрудняетъ учениковъ, если вести дѣло осторожно, постоянно руководясь правиломъ: *не останавливаться на примѣрахъ съ дробями до тѣхъ поръ, пока ученики не смогутъ безъ всякой помощи учителя сдѣлать предложенный для опыта легкій примѣръ*. Такъ поступать слѣдуетъ съ примѣрами каждаго рода. Умѣнье учениковъ

справиться съ дробями (въ простѣйшихъ случаяхъ, какъ говорилось) служитъ, по моему, однимъ изъ лучшихъ признаковъ хорошаго усвоенія пройденнаго. Я, конечно, подразумѣваю, что ученицы при этомъ могутъ дать толковое объясненіе того, что они дѣлаютъ, а не только умѣютъ сдѣлать вычисленіе.

Высказываемыя мною требованія, можетъ быть, покажутся нѣкоторымъ слишкомъ высокими; такимъ читателямъ я напомню, что лучше идти нѣсколько медленнѣе, но за то хорошо; знакомство-же съ дробями необходимо какъ для учебной цѣли (достиженія болѣе полнаго пониманія дѣйствій, большаго оживленія и разнообразія занятій и возможности болѣе полной провѣрки знаній учениковъ), такъ и для практической (знаніе дробей важно въ практической жизни и можетъ внушить родителямъ большее уваженіе къ школѣ, тогда какъ незнаніе учащимися обычныхъ житейскихъ вычисленій съ дробями возбуждаетъ насмѣшливое и недовѣрчивое отношеніе къ школѣ); дѣти разумѣется всегда довольны, если могутъ рѣшать задачи съ дробями и пріобрѣтаютъ большую увѣренность въ своихъ силахъ.

Для пониманія предмета необходимо познакомиться съ разностнымъ и кратнымъ отношеніями и не смѣшивать ихъ (различать выраженія: „насколько больше„ и „во сколько разъ“ больше). Если ученики не могутъ различать ихъ, то, значитъ, они еще не выработали ясныхъ представленій о сложеніи и умноженіи, основныхъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ. Обыкновенно учащіеся сначала довольно долго смѣшиваютъ указанныя выраженія, не потому, что эти выраженія слишкомъ трудны для нихъ, а потому, что они новы, незнакомы учащимся; представленія же о новыхъ предметахъ, какъ извѣстно, не могутъ быть выработаны съ перваго раза, а только при повтореніи впечатлѣній. Разностное и кратное отношеніе тѣмъ болѣе легко смѣшиваются учениками, что выражаются сходными словами. Что пониманіе этихъ выраженій не затрудняетъ учащихся— доказывается яснымъ пониманіемъ учениками каждаго изъ этихъ выраженій въ отдѣльности при рѣшеніи соотвѣтственныхъ задачъ и даже отвлеченныхъ примѣровъ— дѣти, именно, только *смѣшиваютъ* выраженія „насколько“ и „во сколько разъ“. Пусть-же учащіе не смущаются, если ихъ ученики будутъ смѣшивать эти выраженія, и продолжаютъ давать новыя

упражненія въ томъ-же родѣ. Нужно только не заниматься ими исключительно, но останавливаться на нихъ разъ или два въ недѣлю (10—20 минутъ), предлагая прямо *наглядные* примѣры, или выражая числа, данныя въ задачѣ, какими нибудь наглядными пособіями и переходя потомъ къ отвлеченному выраженію сдѣланнаго вычисленія. Такъ какъ пониманіе послѣднихъ имѣетъ очень важное значеніе для пониманія предмета, то и было сказано, что оно должно быть результатомъ «изученія чиселъ первой сотни» или, какъ мы будемъ выражаться, знанія «перваго отдѣла курса» *).

Въ результатѣ занятій первымъ отдѣломъ должно явиться и знакомство съ сущностью системы счисленія, хотя на объясненіи ея останавливаться еще не придется: вычисляя съ числами, состоящими изъ двухъ разрядовъ (десятковъ и единицъ), дѣти привыкнутъ къ раздѣленію чиселъ на разряды, къ производству дѣйствій по разрядамъ и къ обращенію единицъ изъ одного разряда въ другой; при этомъ они, разумѣется, вполнѣ поймутъ необходимость счета единицами различныхъ разрядовъ и привыкнутъ къ мысли, что десять единицъ составляютъ одну единицу новаго разряда.

Опредѣливъ тѣ результаты, которые должны быть достигнуты при усвоеніи перваго отдѣла курса, скажу относительно выполненія его только одно: для достиженія цѣли нужно главнымъ образомъ заботиться о томъ, чтобы не оставлять *ни одного упражненія безъ объясненія и ни одного объясненія безъ соотвѣтственныхъ упражненій.* Давая всегда объясненія ученикамъ, требуйте и отъ нихъ умѣнья объяснить все то, что они дѣлаютъ, и не идите впередъ, пока не получите удовлетворительныхъ объясненій. Если ученикъ твердо все объясняетъ, то онъ «чувствуетъ свое знаніе». Если какое нибудь объясненіе ваше трудно дается дѣтямъ—перемѣните пріемъ объясненія, постарайтесь вывести его какъ заключеніе изъ ряда примѣровъ (подготовитъ объясненіе практическимъ знаком-

---

*) Подъ словами „отдѣлъ курса“ я подразумѣваю законченную по содержанію часть курса, составляющую самостоятельное цѣлое, т. е. отличающуюся по содержанію отъ другихъ частей и имѣющую свою особую цѣль; по окончаніи каждаго отдѣла могутъ быть въ случаѣ надобности прекращены занятія ариеметикой, такъ какъ ученики всетаки получатъ знаніе *всего* предмета, хотя въ упрощенномъ видѣ, а не отрывочныя свѣдѣнія нѣкоторыхъ частей предмета.

ствомъ съ дѣломъ); если же и это вамъ не удается—отложите объясненіе на нѣкоторое время (недѣлю, двѣ), чтобы дѣти успѣли совсѣмъ отдохнуть и со свѣжими силами вновь приняться за временно оставленную работу.

Если первый отдѣлъ будетъ пройденъ хорошо, имъ будетъ положено твердое основаніе для пониманія и легкаго усвоенія дальнѣйшаго курса: первый отдѣлъ, какъ было сказано, практически знакомитъ съ сущностью всего предмета.

Чтобы какъ можно яснѣе выразить свою мысль, въ слѣдующей главѣ я укажу кратко на отличія предлагаемаго курса отъ тѣхъ, которыя предлагаются другими авторами. Но я считаю болѣе удобнымъ не прерывать теперь изложеніе плана всего курса. Перехожу къ изложенію этого плана.

Первый отдѣлъ курса, говорилъ я — отдѣлъ практическій, обставленный такими условіями, при которыхъ всякія затрудненія устраняются, чтобы сосредоточить вниманіе учащихся на основныхъ ариѳметическихъ понятіяхъ; эти понятія однако еще не опредѣляются, такъ какъ прежде должна быть подготовлена возможность пониманія ихъ, т. е. прежде должны быть показаны частные случаи. Какъ-же долженъ развиваться курсъ дальше? Отвѣтъ вытекаетъ изъ тѣхъ соображеній, которыя привели къ установленію основной мысли курса. При обученіи ариѳметикѣ, говорили мы, практически познакомивъ ученика съ дѣйствіями надъ числами и отношеніями чиселъ, какъ составляющими сущность содержанія предмета, должно довести ученика до обобщенія и выраженія того, что усвоено имъ практически и, наконецъ, до выработки связной и законченной теоріи предмета. Если учащіеся при прохожденіи перваго отдѣла дѣйствительно практически усвоили основанія предмета, какъ мы требовали выше, то послѣ этого и слѣдуетъ перейти къ тому, чтобы довести дѣтей *) до *сознанія* и обобщенія всего пройденнаго на практическихъ упражненіяхъ.

Знаніе учениковъ достигло сознательности, если они могутъ говорить не только объ отдѣльномъ данномъ примѣрѣ, но и о всѣхъ однородныхъ случаяхъ, т. е. не только имѣютъ представленія о

*) Подъ учащимися я постоянно подразумѣваю дѣтей, такъ какъ со взрослыми, хотя-бы и неграмотными, занятія должны идти иначе, а какъ именно—будетъ сказано впослѣдствіи.

частныхъ случаяхъ, но и обобщили ихъ, выработали понятіе о предметѣ изученія. Понятіе о какомъ-либо предметѣ можно считать выработаннымъ, если ученики могутъ высказать его своими словами и привести свои собственные частные примѣры, подходящіе подъ это понятіе. Конечно, ученики *) не могутъ сами по себѣ составить опредѣленіе понятія (не могутъ его выразить), для составленія его необходима помощь учителя; но если возможность опредѣленія понятія была подготовлена практическими упражненіями, то ученики въ состояніи будутъ дойти до опредѣленія, хотя, можетъ быть, дурно выраженнаго, по намеку учителя, когда онъ обратитъ вниманіе и усилія учениковъ именно на тѣ особенности знакомыхъ и разобранныхъ прежде примѣровъ, которыя всего яснѣе указываютъ сущность дѣла, всего ближе намекаютъ на опредѣленіе. Для выработки опредѣленія, разумѣется, нельзя ограничиваться однимъ примѣромъ, необходимо привести ихъ нѣсколько; сравненіе ихъ и покажетъ тѣ общіе признаки, которые входятъ въ опредѣленіе, т. е. въ составъ понятія о предметѣ. (Опредѣленіе понятія—указаніе его важнѣйшихъ признаковъ, дающихъ возможность отличить это понятіе отъ всѣхъ другихъ). Такой путь учебной работы при занятіяхъ ариѳметикой необходимъ потому, что идетъ рѣчь о началѣ обученія; дѣти еще не знаютъ, что такое опредѣленіе, для чего оно нужно и совершенно не умѣютъ его составить. Обученіе ариѳметикѣ должно непосредственно, т. е. путемъ личнаго ихъ опыта, познакомить учениковъ съ выработкой опредѣленій и должно выяснить значеніе послѣднихъ. Если дѣти почувствовали, что составленное ими опредѣленіе выяснило имъ то, чего прежде они не понимали, то впослѣдствіи сами будутъ сремиться къ опредѣленіямъ и постепенно научатся доходить до нихъ.

Понятій, входящихъ въ составъ содержанія предмета, которыя, поэтому, должны быть опредѣлены, обыкновенно бываетъ довольно много. Давать опредѣленія многихъ понятій въ короткое время нельзя: ученики будутъ ихъ смѣшивать, хотя-бы каждое въ отдѣльности первоначально было правильно понято ими, и чѣмъ сложнѣе понятіе, тѣмъ большій промежутокъ времени долженъ пройти отъ сообщенія его опредѣленія до сообщенія опредѣленій другихъ понятій.

*) Такіе ученики, которые проходятъ только начало курса ариѳметики, совсѣмъ еще не опредѣляли никакихъ понятій.

Сложныя или очень отвлеченныя понятія даже никогда нельзя развивать передъ учениками въ короткое время; такъ, напримѣръ, понятіе объ ариѳметикѣ (какъ цѣломъ предметѣ) не можетъ быть выработано въ началѣ занятій ею, а должно подготовляться постепенно и явиться результатомъ продолжительныхъ занятій, даже результатомъ всего курса.

Ариѳметика (какъ было сказано въ первой главѣ) особенно удобна въ учебномъ отношеніи, какъ заключающая въ себѣ сравнительно небольшое число понятій, или, какъ говорятъ, имѣющая сравнительно простое содержаніе; но и она заключаетъ въ своей теоріи значительное количество такихъ понятій, которыя должны быть опредѣлены. Необходимо поэтому установить порядокъ, въ которомъ слѣдуетъ сообщать эти опредѣленія. Вопросъ теперь въ томъ, какъ установить этотъ порядокъ.

Первый отдѣлъ предлагаемаго курса практически знакомитъ со *всѣмъ* предметомъ. (Важное значеніе такой постановки курса уже было объяснено.)

Когда предметъ практически усвоенъ, единственно возможное далнѣйшее движеніе впередъ—обобщеніе пройденнаго, другими словами—окончательная выработка и опредѣленіе понятій. Дать въ короткое время всѣ опредѣленія невозможно, поэтому, что всего важнѣе, то должно быть и опредѣлено прежде всего; тогда вниманіе учащихся сосредоточится на важнѣйшей части предмета, и они привыкнутъ считать эти понятія первыми, самыми важными; при принятой системѣ курса эти понятія въ тоже время будутъ наиболѣе практически подготовлены, наиболѣе знакомы дѣтямъ: надо начать съ опредѣленія понятій о четырехъ основныхъ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ. (При этомъ сами собою выяснятся и двоякаго рода отношенія чиселъ.) Учителю слѣдуетъ даже прямо высказать ученикамъ, что на четыре ариѳметическія дѣйствія нужно обратить особенное вниманіе, такъ какъ зная и понимая ихъ, они будутъ легко понимать все остальное.

При хорошемъ усвоеніи учениками перваго отдѣла курса всегда чувствуется *потребность* въ опредѣленіи основныхъ ариѳметическихъ дѣйствій. Ученики уже передѣлали массу примѣровъ и задачъ и привыкли объяснять все, что они дѣлаютъ, значитъ хорошо понимаютъ каждый подобный случай въ отдѣльности (примѣ-

няли даже дѣйствія къ дробямъ); новые примѣры уже не даютъ пищи ихъ уму, не требуютъ никакой работы. Легкость, съ какою ученики дѣлаютъ всѣ предлагаемые примѣры, доказываетъ это. (Она служитъ для учителя мѣркою при сужденіи о томъ, насколько ученики усвоили пройденныя упражненія). Если-же пройденное усвоено учениками, то необходимо идти впередъ, нужно дать новую работу, которая заставила-бы учениковъ трудиться; въ противномъ случаѣ учащіеся быстро начинаютъ скучать вполнѣ знакомыми имъ упражненіями, могутъ даже совсѣмъ потерять интересъ къ предмету и сдѣлаться невнимательными. Дѣти только тогда интересуются предметомъ, если онъ занимаетъ ихъ мысль, заставляетъ работать ихъ умъ; удовольствіе, которое они испытываютъ, дойдя до чего нибудь своимъ умомъ, т. е. сознаніе собственной дѣятельности и силы и составляетъ ту притягательную силу, которая заставляетъ дѣтей отдаваться своимъ занятіямъ вполнѣ. Интересъ къ занятіямъ, возбуждаемый не ими самими, а какими-небудь посторонними причинами или внѣшней обстановкой, всегда ненадеженъ, а главное —приноситъ очень мало пользы, такъ какъ не пріучаетъ къ работѣ и къ серьезному отношенію къ ней.

Кромѣ основныхъ дѣйствій во второмъ отдѣлѣ курса должны быть обяснены: 1) система счисленія, 2) производство дѣйствій надъ большими и надъ именованными числами. Въ остальномъ пока нѣтъ надобности, потому что оно относится, какъ было объяснено, къ усовершенствованію вычисленій, но не составляетъ необходимой части теоріи. Знаніе-же системы счисленія и производства дѣйствій надъ большими и именованными числами безусловно необходимо (если мы не хотимъ ограничить себя въ вычисленіяхъ), однако опредѣленіе ихъ, какъ менѣе важныхъ понятій, можно отложить на нѣкоторое время. Упражненія съ дробями все время должны идти рядомъ съ остальными упражненіями. Они должны всегда способствовать разнообразію упражненій и постепенно подготовить матеріалъ для выработки опредѣленій дѣйствій надъ дробями, а также и умѣнья дѣлать различныя преобразованія дробныхъ выраженій. Можетъ быть, что ученикамъ и не придется дойти до курса дробей; но они, повторяемъ, по крайнѣй мѣрѣ не будутъ затрудняться въ обычныхъ житейскихъ вычисленіяхъ, которыя такъ часто приводятъ къ дѣйствіямъ надъ дробями, и достигнутъ бо-

лѣе полнаго пониманія предмета. Если-же учащіеся пойдутъ дальше, упомянутыя упражненія съ дробями будутъ имѣть для нихъ еще болѣе важное значеніе, такъ какъ подготовятъ ихъ къ дальнѣйшему курсу. Мы думаемъ и горячо стоимъ за то, что на курсѣ дробей всегда должны отражаться предыдущія занятія ариѳметикой, поэтому упражненія съ дробями никогда не должны идти въ томъже порядкѣ, какъ и съ цѣлыми числами, и никогда знакомство съ дробями не должно идти нагляднымъ путемъ. По нашему мнѣнію, если ученики послѣ двухлѣтнихъ или трехлѣтнихъ занятій ариѳметикой не могутъ усвоить курса дробей безъ помощи наглядныхъ пособій, то это показываетъ, что они плохо поняли прежнее, не усвоили ариѳметическихъ понятій и не привыкли къ умственной работѣ. Вычисленія съ дробями, постепенно усложняясь, должны проходить черезъ весь курсъ, а курсъ дробей собственно долженъ состоять въ обобщеніи тѣхъ практическихъ свѣдѣній, которыя были пріобрѣтены въ предыдущіе годы. Многіе находятъ, что дѣтямъ трудно дается курсъ дробей (особенно труднымъ считался онъ въ прежнее время, а теперь—въ школахъ стариннаго склада), что дѣти путаютъ между собою различныя дѣйствія надъ дробями; но трудность только тогда и является, когда дѣти не подготовлены прежними занятіями, а даже, напротивъ, привыкли къ неправильнымъ опредѣленіямъ дѣйствій, которыя потомъ мѣшаютъ имъ усвоить дѣйствія надъ дробями *). Встрѣчая сразу весьма разнообразныя преобразованія и вычисленія съ дробями, дѣти, конечно, путаютъ ихъ; лучшее средство избѣжать трудностей: *постепенно* подготовлять къ дѣйствіямъ надъ дробями, вводя новаго рода упражненія только тогда, когда прежнія дѣлаются безъ затрудненія, но начиная упражненія въ первые-же мѣсяцы занятій и распространяя на дроби понятія о дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами. Постепенно знакомить съ дробями вполнѣ возможно и выгодно во всѣхъ отношеніяхъ; напоминаемъ только данный совѣтъ: не давать во время прохожденія перваго отдѣла курса такихъ упражненій съ дробями, которыя потребовали-бы длинныхъ объясненій со стороны учителя, не могли-бы быть сдѣланы учениками по соображенію. Начавъ сосложенія и вычитанія несложнаго вида дробей съ одинаковыми

---

*) См. начало первой главы.

знаменателями, переходя потомъ къ повторенію данной дроби нѣсколько разъ, исключенію цѣлаго числа изъ неправильной дроби и обращенію смѣшаннаго числа въ неправильную дробь, дѣленію цѣлаго числа на небольшое число частей, можно черезъ нѣсколько времени дойти до дѣленія дроби, имѣющей числителемъ единицу, а знаменателемъ небольшое число, на два, на три, на четыре, до сложенія и вычитанія смѣшанныхъ чиселъ и несложныхъ дробей, имѣющихъ различные знаменатели ($^1/_2$ и $^1/_4$ ученики лѣтъ 10 сложатъ безъ затрудненія, а этимъ примѣромъ легко воспользоваться), до умноженія цѣлаго числа на дробь и на смѣшанное число и т. д.

Итакъ, цѣль втораго, разсматриваемаго теперь отдѣла курса— обобщеніе практическихъ знаній, пріобрѣтенныхъ раньше; первыми должны быть обобщены понятія о дѣйствіяхъ. Опредѣленія всѣхъ дѣйствій не должны даваться одновременно, такъ какъ усвоеніе всякаго обобщенія требуетъ со стороны дѣтей значительнаго труда, а опредѣленія дѣйствій—одни изъ первыхъ обобщеній, встрѣчающихся дѣтямъ. Не всѣ опредѣленія одинаковы и по трудности ихъ усвоенія. Понятія о сложеніи и вычитаніи всего легче даются дѣтямъ и даже очень легко, понятіе объ умноженіи—также не трудно, хотя различеніе кратнаго и разностнаго отношеній прежде (въ первый годъ обученія) затрудняло учениковъ. Больше другихъ затрудняетъ дѣленіе; его удобнѣе опредѣлять сначала съ указаніемъ на два частныхъ случая *).

Сложеніе и вычитаніе, какъ очень простыя дѣйствія, могутъ быть опредѣлены значительно (до 4 мѣсяцевъ) раньше двухъ другихъ. Замѣтимъ еще, что опредѣленія первыхъ двухъ дѣйствій могутъ быть даны нѣсколько раньше, чѣмъ предѣлъ чиселъ, входящихъ въ вычисленія, дойдетъ до 100, такъ какъ дѣти обыкновенно не затрудняются обобщеніемъ всѣхъ встрѣчающихся случаевъ сложенія и вычитанія. Но каждое изъ этихъ дѣйствій лучше опредѣлять отдѣльно, а послѣ полнаго усвоенія опредѣленій полезно сравнить дѣйствія, для лучшаго выясненія каждаго изъ нихъ; удобнымъ поводомъ къ тому можетъ служить повѣрка одного дѣйствія другимъ. Дѣти всегда догадываются, что для повѣрки сло-

---

*) См. начало первой главы.

женія надо отнять одно изъ двухъ данныхъ чиселъ отъ суммы; разобравъ причину возможности такой повѣрки, они придутъ къ заключенію, что одно дѣйствіе противуположно другому. Подобное-же сравненіе полезно сдѣлать и при изученіи двухъ другихъ дѣйствій.

Признакомъ того, что ученики уже достаточно подготовлены и въ состояніи усвоить опредѣленія дѣйствій (т. е. дойти до обобщенія), можетъ служить умѣнье учащихся безошибочно употреблять знаки дѣйствій и свободно объяснять всѣ частные случаи, которые имъ встрѣчаются, наконецъ, умѣнье придумать свою задачу на указанный частный случай дѣйствія, напримѣръ, такую задачу, для рѣшенія которой нужно одно число придать къ другому, увеличить на какое-нибудь число и т. д. (Предлагая составить задачу, учитель не долженъ употреблять названій дѣйствій, выражая условія составленія обыкновеннымъ разговорнымъ языкомъ).

Занимаясь опредѣленіями дѣйствій, никакъ ни слѣдуетъ останавливаться исключительно на нихъ однѣхъ, такъ какъ никогда не слѣдуетъ допускать преобладанія какой-нибудь одной стороны дѣла (теоретической или практической—все равно); на обобщенія и упражненія, прямо предназначенныя для усвоенія этихъ обобщеній, не слѣдуетъ удѣлять больше половины ариѳметическихъ уроковъ; на остальныхъ-же урокахъ лучше всего по прежнему заниматься какъ рѣшеніемъ и объясненіемъ задачъ, такъ и вычисленіями, стараясь постоянно давать примѣры на всѣ роды знакомыхъ дѣтямъ вычисленій *).

Не останавливаясь пока на описаніи хода работъ при выводѣ опредѣленій дѣйствій, скажу только, что матеріаломъ для вывода должны служить тѣ практическія упражненія, которыя разбирались прежде, т. е. не буквально тѣ самыя, но совершенно такого-же рода. Давши нѣсколько примѣровъ на то дѣйствіе, опредѣленіе котораго хотимъ вывести, и записавъ ихъ на доскѣ, мы напомнимъ дѣтямъ всѣ знакомые имъ частные случаи; сопоставляя

*) Указываемъ на это потому, что многіе учителя, увлекаясь работой, долго занимаются исключительно одними какими-нибудь упражненіями. Составители руководствъ къ преподаванію ариѳметики нерѣдко даютъ къ этому поводъ, такъ какъ не указываютъ прямо на неудобство продолжительныхъ однообразныхъ занятій.

ихъ, ученики замѣтятъ ихъ сходство, и тогда уже не трудно будетъ выразить найденные общіе признаки, т. е. закончить обобщеніе и дойти до опредѣленія. Ученики обыкновенно не могутъ сдѣлать обобщенія безъ помощи учителя потому, что не сопоставляютъ между собою извѣстные имъ частные случаи. Работа учителя и состоитъ въ томъ, что онъ заставляетъ учениковъ припомнить все нужное для вывода и такимъ образомъ наталкиваетъ учащихся на невольное сопоставленіе; а спрашивая о сходствѣ разсматриваемыхъ случаевъ, учитель побуждаетъ учениковъ глубже вдуматься въ разобранные примѣры и окончательно обобщить ихъ, т. е. составить опредѣленіе дѣйствія. Послѣ этого остается только придать лучшую форму выраженной мысли, такъ какъ въ большинствѣ случаевъ дѣти выскажутъ мысль свою неловко и несовсѣмъ точно, и закрѣпить усвоенное понятіе разнообразными новыми упражненіями.

При прохожденіи перваго отдѣла обыкновенно совѣтуютъ требовать отъ учащихся умѣнья записать все то, что они дѣлаютъ съ числами; это, какъ я говорилъ выше, помогаетъ учащимся выяснить себѣ смыслъ выполняемаго ими вычисленія. Когда-же ученики переходятъ къ обобщеніямъ, выраженіе различныхъ случаевъ вычисленій немногими знаками (всего 4 знака дѣйствій) служитъ хорошимъ подспорьемъ для вывода, такъ какъ внѣшнимъ образомъ указываетъ учащимся на одинаковость дѣйствія во всѣхъ записанныхъ случаяхъ; при томъ ученики уже *давно* привыкли къ употребленію знаковъ, слѣдовательно вполнѣ сознаютъ правильность ихъ постановки, а потому уже легко *вѣрятъ* въ сходство дѣйствій, прямо ищутъ его причину, не сомнѣваясь въ его существованіи. Совершенно новые факты, хотя-бы сами по себѣ и очень простые, часто настолько поражаютъ учащихся, что они не могутъ съ ними освоиться и съ недовѣріемъ смотрятъ на нихъ, какъ-бы не довѣряя даже ихъ существованію, и потому дѣти уже не могутъ всматриваться въ нихъ и обобщать. («Какъ-же такъ»— обычная у дѣтей форма вопроса въ подобныхъ случаяхъ). Поэтому-то и важно заранѣе подготовить возможность обобщенія, вести дѣло издалека.

Вслѣдъ за опредѣленіями дѣйствій, сравненіемъ ихъ и повѣркой, нужно познакомить учениковъ съ законами производства и съ

системой счисленія. Какъ съ первыми, такъ и со второю учащіеся отчасти знакомы по первому отдѣлу курса—это само собою понятно; однакоже нельзя совѣтывать теперь-же вполнѣ объяснить дѣтямъ систему счисленія и производство дѣйствій; выгоднѣе сперва ограничиться расширеніемъ предѣла чиселъ, вводимыхъ въ вычисленія, до 1000 или 10000, а потомъ уже обобщить способъ выраженія чиселъ и производства дѣйствій. Дѣло въ томъ, что полное объясненіе этихъ понятій требуетъ значительнаго количества времени не потому, что они трудны, а потому, что нужно большое количество упражненій для пріобрѣтенія навыка быстро вычислять съ многозначными числами. Если сразу дать большія числа, то сложность вычисленій сбиваетъ дѣтей, и они не могутъ уловить сущности дѣла, а потому безсознательно стремятся усвоить лишь механизмъ вычисленій, т. е. замѣтить порядокъ вычисленій и расположеніе чиселъ, не понимая смысла вычисленія и даже не думая слѣдить за нимъ (обращаютъ вниманіе только на внѣшніе признаки). Разъ это случилось—тогда уже не легко отучить дѣтей отъ такой дурной привычки въ работѣ. Ограничивая сперва числа небольшими предѣлами, мы дадимъ возможность учащимся сознательно отнестись къ дѣлаемымъ ими вычисленіямъ и вмѣстѣ съ тѣмъ будемъ способствовать развитію въ дѣтяхъ привычки къ правильной работѣ. Когда-же они поймутъ производство дѣйствій и способъ выраженія чиселъ до 1000—10000, то легко распространятъ ихъ на бо̀льшія числа и быстро пріобрѣтутъ навыкъ въ вычисленіяхъ. Раздѣленіе на части всякихъ сложныхъ объясненій и постепенная подготовка къ нимъ всегда выгодны при занятіяхъ съ дѣтьми и не только даютъ возможность лучше и легче усвоить дѣло, но даже и сбереженіе времени.

На указаніи основныхъ пріемовъ (законовъ) производства дѣйствій всего лучше остановиться непосредственно послѣ составленія опредѣленій ариѳметическихъ дѣйствій. Указаніе пріемовъ производства послужитъ тогда полезнымъ дополненіемъ къ пріобрѣтенному знакомству съ дѣйствіями, обратитъ вниманіе учащихся на новую сторону дѣла. Дать объясненіе основаній производства въ это время вполнѣ уже возможно, дѣти къ нему будутъ подготовлены, если при прохожденіи перваго отдѣла курса будетъ исполненъ данный совѣтъ: „обращать вниманіе учащихся на *пріемы* вычисле-

ній“, не зная которыхъ можно запомнить результаты дѣйствій, но нельзя выучиться ихъ отыскивать и нельзя подготовиться къ дальнѣйшему курсу. Объяснять основанія производства дѣйствій *) опять-таки слѣдуетъ при помощи разбора примѣровъ, уже знакомыхъ учащимся. (Сперва учитель даетъ примѣръ, предлагаетъ его сдѣлать, а потомъ требуетъ, чтобы ученики разсказали, какъ они дѣлали вычисленіе). Практическая подготовка всегда предшествуетъ выводу.

Для большей отчетливости объясненій при разборѣ производства дѣйствій лучше всего брать примѣры съ именованными числами. Въ нихъ каждаго рода единицы имѣютъ особыя названія и это дѣлаетъ разсказъ о производствѣ дѣйствія гораздо болѣе удобнымъ, а весь ходъ вычисленія—яснѣе; при дѣйствіяхъ же надъ отвлеченными числами обращенія единицъ одного разряда въ другой, собственно говоря, не приходится дѣлать, какъ скоро названо число единицъ разряда. (Говоря, напримѣръ: 15 единицъ, мы уже высказываемъ этимъ, что получили одну единицу слѣдующаго разряда).

Къ усвоенію системы счисленія дѣти также будутъ подготовлены прежними упражненіями въ выраженіи чиселъ

Понятіе о числѣ, какъ очень отвлеченное, трудно дается дѣтямъ, но они всегда понимаютъ его значеніе,—поэтому не слѣдуетъ стараться доводить учащихся до усвоенія отвлеченнаго опредѣленія числа, но полезно остановиться на указаніи цѣли употребленія чиселъ, выражаясь, напримѣръ, такимъ образомъ: числа

*) Дѣйствія производятся всегда по разрядамъ; результаты, получаемые при выполненіи дѣйствія надъ единицами каждаго разряда въ отдѣльности, должны быть соединены въ одинъ. Сложеніе и вычитаніе производятся только надъ числами однородными и результатъ всегда однороденъ съ данными и притомъ того-же разряда, какъ и данныя. Умножать можно только на отвлеченное число притомъ всегда слѣдуетъ обращать вниманіе на разрядъ получаемаго результата. Послѣднее замѣчаніе относится и къ дѣленію; но дѣлить можно и на отвлеченное, и на именованное число. Слѣдуетъ еще указать учащимся на возможность полученія въ какомъ-нибудь разрядѣ болѣе 10 единицъ (при прямыхъ дѣйствіяхъ) и какъ слѣдуетъ поступать въ подобныхъ случаяхъ, а также на тѣ затрудненія, которыя встрѣчаются при выполненіи вычитанія и дѣленія, когда число единицъ того-же разряда уменьшаемаго или когда взятая часть дѣлимаго меньше дѣлителя и т. д. Подробное объясненіе производства дѣйствій см. въ „Объяснительномъ курсѣ ариѳметики В. Латышева“.

показываютъ, много-ли тѣхъ предметовъ, о которыхъ говорится (количество ихъ), или показываютъ сколько мѣръ заключается въ томъ предметѣ, который измѣряли.

Задачи, предлагать которыя нужно постоянно, во все время занятій, также измѣняются по своему содержанію; измѣняться должны и работы, предлагаемыя ученикамъ при рѣшеніи задачъ, т. е. пріемы рѣшенія, разбора и повѣрки задачъ, (какъ устныя такъ и письменныя работы). Для выясненія общей мысли курса не лишнимъ считаю замѣтить, что въ первое время форма разсказа рѣшенія задачи вполнѣ предоставляется дѣтямъ, но потомъ слѣдуетъ пріучать ихъ къ опредѣленнымъ формамъ; особенно полезно пріучать къ разсказу предполагаемаго хода рѣшенія (плана) задачи, прежде чѣмъ будутъ сдѣланы нужныя вычисленія. Такія упражненія полезны потому, что развиваютъ въ дѣтяхъ способность давать себѣ отчетъ о цѣлой задачѣ, слѣдить за послѣдовательностью вычисленій и пріучаютъ предварительно обдумывать свою работу.

Дѣти довольно легко выучиваются обдумывать планъ рѣшенія задачи, прежде чѣмъ приняться за вычисленія, если отъ нихъ требуютъ такой работы сперва при рѣшеніи легкихъ задачъ и предварительно пріучивъ разсказывать планъ рѣшенія *сдѣланной* задачи. Формы упражненій съ задачами очень разнообразны, смотря по цѣли, съ которою предлагаются послѣднія.

Задачи, предлагаемыя ученикамъ, должны постепенно усложняться по своему содержанію; но увеличиваться должно не только количество данныхъ и дѣйствій, входящихъ въ рѣшеніе: необходимо, чтобы увеличивалась нѣсколько и трудность условій, такъ какъ она главнымъ образомъ содѣйствуетъ развитію сообразительности, а не количество условій. Существующіе сборники задачъ страдаютъ или отсутствіемъ постепенности въ усложненіи задачъ (т. е. небрежнымъ расположеніемъ ихъ), или-же отсутствіемъ сколько-нибудь интересныхъ задачъ и притомъ предлагаютъ задачи почти все одного типа, въ которыхъ только количество данныхъ увеличивается и черезъ это удлиняется рѣшеніе. Обычное раздѣленіе задачъ на группы по характеру ихъ содержанія (задачи на тройныя правила, на вычисленіе процентовъ, на правило товарищества и т. п.) невыгодно отражается на успѣхахъ учениковъ:

узнавъ, къ какой группѣ относится задача, учащіеся узнаютъ и пріемъ ея рѣшенія, поэтому вовсе надъ ней не думаютъ, а слѣдовательно и пользы получаютъ очень мало. Между тѣмъ большинство задачъ, если только хорошо расположить ихъ, т. е. по степени ихъ сложности, можетъ быть рѣшено безъ особенныхъ затрудненій самими учениками. Задачи на тройныя правила и правило товарищества находятся даже во всѣхъ сборникахъ въ числѣ тѣхъ задачъ, которыя назначаются для начинающихъ; задачи на вычисленіе процентовъ также безъ труда могутъ рѣшаться 10—11-лѣтними дѣтьми, по крайней мѣрѣ простѣйшія, если только въ простыхъ выраженіяхъ объяснить, что называютъ процентомъ; задачи на правило смѣшенія труднѣе, но и онѣ встрѣчаются почти всегда въ первыхъ отдѣлахъ сборниковъ. Польза отъ рѣшенія задачъ на извѣстное „правило“ обыкновенно еще уменьшается тѣмъ, что пріемы рѣшенія ихъ не изобрѣтаются учениками, а прямо указываются учителемъ; ученики даже не усваиваютъ хорошенько пріемовъ рѣшеній, а механически заучиваютъ ихъ. Справедливость высказываемаго мнѣнія доказывается стремленіемъ большинства учащихся, особенно-же слабыхъ учениковъ, сперва извѣстнымъ образомъ расположить данныя (какъ показывалъ учитель), а потомъ уже приниматься за рѣшеніе задачи; не расположивши предварительно данныя числа по заученному образцу, многіе ученики даже вовсе не могутъ рѣшить задачи. Когда дурная привычка уже сдѣлана, отвыкнуть отъ нея очень трудно.

Однако, если задачи должны рѣшаться по соображенію, а не по данному образцу, это еще не значитъ, что указаній на „правила“ совсѣмъ не нужно дѣлать; напротивъ, такія указанія могутъ быть очень полезны, только давать ихъ слѣдуетъ *послѣ* того, какъ ученики сами дойдутъ до рѣшенія задачъ; указанія на „правила“ явятся тогда обобщеніемъ задачъ: они выяснятъ общность пріемовъ рѣшенія задачъ, сходныхъ по содержанію, и помогутъ ученикамъ понять составъ задачъ. Общій пріемъ рѣшеній слѣдуетъ давать только тогда, когда всякаго рода задачи свободно рѣшаются учениками, поэтому его всегда приходится давать гораздо позже, чѣмъ опредѣленія понятій о дѣйствіяхъ и системѣ счисленія; къ тому-же понятія о составѣ задачъ и пріемахъ рѣшеній ихъ болѣе сложны, чѣмъ понятія о дѣйствіяхъ.

Навыкъ учениковъ въ рѣшеніи задачъ прямо зависитъ отъ продолжительности курса; въ начальныхъ школахъ, гдѣ курсъ продолжается года три, дойти до сложныхъ задачъ и до указанія общихъ пріемовъ рѣшеній ихъ не придется; въ такихъ школахъ хотя слѣдуетъ заботиться и о развитіи сообразительности въ дѣтяхъ, но особенно важно обратить вниманіе на практическія задачи. Мы постоянно выражаемъ ту мысль, что начальное образованіе должно дать непремѣнно такія знанія, которыя могутъ быть полезны и въ жизни, иначе у учащихся и ихъ родителей легко можетъ развиться пренебреженіе къ ученію. Начальное обученіе тѣмъ особенно и трудно, что въ короткій срокъ необходимо достигнуть практическихъ результатовъ и въ тоже время не упустить изъ виду образовательной цѣли; народъ не будетъ развиваться, если школа не успѣетъ сообщить учащимся умѣнье и охоту работать умственно и продолжать свое самообразованіе, но для достиженія этой цѣли необходимо прежде всего убѣдить въ полезности школьныхъ знаній.

Теперь высказаны замѣчанія относительно всѣхъ сторонъ втораго отдѣла курса. Повторимъ ихъ вкратцѣ, чтобы опредѣлить содержаніе этого отдѣла.

Особенность и самую существенную часть этого отдѣла составляютъ обобщенія пройденнаго, сообщаемыя въ извѣстномъ порядкѣ, по степени ихъ важности. Самое видное мѣсто занимаютъ опредѣленія дѣйствій и дополнительныя къ нимъ работы; потомъ идетъ усвоеніе производства дѣйствій, расширеніе предѣловъ, чиселъ, вводимыхъ въ вычисленія, и, наконецъ, объясненіе системы счисленія. Опредѣленіе числа не дается, хотя указывается на значеніе чиселъ. Общихъ пріемовъ рѣшеній задачъ не дается, но самыя задачи усложняются и по поводу ихъ рѣшенія предлагаются новаго рода работы; ученики пріучаются обдумывать и высказывать планъ рѣшенія сложныхъ задачъ до выполненія вычисленій; въ числѣ задачъ должны встрѣчаться задачи на всѣ, такъ называемыя, правила (хотя послѣднія и не указываются). Вычисленія съ дробями также продолжаются и постепенно вводятся новыя упражненія съ ними, такъ чтобы въ слѣдующемъ отдѣлѣ курса осталось только обобщать пройденное, т. е. ученики должны практически познакомиться со всѣми дѣйствіями надъ дробными числами. Кромѣ новыхъ работъ должны постоянно продолжаться всякаго

рода вычисленія и упражненія въ рѣшеніи задачъ; въ противномъ случаѣ ученики, съ одной стороны, крайне утомляются отъ постояннаго движенія курса впередъ, а съ другой стороны—забываютъ многое изъ пройденнаго.

На прохожденіе перваго, практическаго отдѣла курса обыкновенно требуется около двухъ лѣтъ времени; на прохожденіе втораго отдѣла, въ которомъ обобщаются всѣ пріобрѣтенныя прежде знанія—около года или $1^1/_2$ г.

На первомъ планѣ во все время занятій находятся дѣйствія надъ числами и отношенія чиселъ, какъ составляющія наиболѣе важную часть ариѳметической теоріи (сосредоточивающія въ себѣ основанія всего предмета). Такое расположеніе матеріала, при которомъ ученики съ самаго начала знакомятся съ цѣлымъ предметомъ, хотя въ упрощенномъ (сжатомъ) видѣ, и основныя части предмета составляютъ важнѣйшее содержаніе всѣхъ послѣдующихъ отдѣловъ, только развиваясь все полнѣе и глубже, такъ что постепенно вырабатывается полная теорія предмета, такое расположеніе курса называютъ *концентрическимъ*, а тѣ основанія теоріи, около которыхъ группируется все остальное—*центромъ* курса. Въ предлагаемомъ мною планѣ концентрическаго курса ариѳметики центръ, какъ видно изъ предъидущаго, составляютъ дѣйствія надъ числами (а отношенія чиселъ—дополненіе понятій о дѣйствіяхъ).

Концентрическое расположеніе матеріала весьма важно въ предметахъ первоначальнаго обученія, потому что способствуетъ пониманію предмета; при такомъ способѣ расположенія матеріала всего легче привлечь учениковъ къ дѣятельному участію въ классной работѣ и выучить правильно работать, такъ какъ практически знакомя съ основаніями предмета и постепенно доходя до обобщеній, а при болѣе продолжительномъ курсѣ и до полной теоріи, мы слѣдуемъ тому пути, по которому идетъ вообще развитіе нашей мысли. Но подобное расположеніе матеріала во всѣхъ предметахъ обученія совершенно ненужно, и даже болѣе—вредно. Оно ненужно, потому что, познакомившись съ нѣсколькими предметами и пріобрѣтя нѣкоторый навыкъ въ умственной работѣ, всякій учащійся можетъ усваивать новыя знанія гораздо быстрѣе прежняго, можетъ даже впослѣдствіи со словъ учителя понять основанія предмета, не имѣя надобности достигать усвоенія ихъ длиннымъ

рядомъ практическихъ упражненій. Оно вредно, какъ вредна всякая однообразная работа, потому что ни умѣнье принаравливаться къ работѣ и ея условіямъ, ни самостоятельность въ работѣ не могутъ тогда развиться (ни въ какомъ дѣлѣ невозможно ограничиться однообразными пріемами во всѣхъ случаяхъ). Конечно, между начальнымъ обученіемъ и самостоятельной работой громаднѣйшая разница; но и пріемы учебной работы также постепенно должны измѣняться, иначе пропасть никогда не будетъ пройдена.

Ариѳметика, какъ я уже говорилъ въ первой главѣ, должна быть однимъ изъ первыхъ предметовъ обученія; содержаніе ея теоріи, благодаря престотѣ послѣдней, легко поддается концентрическому расположенію; это составляетъ важную выгоду и дѣлаетъ ариѳметику предметомъ вполнѣ пригоднымъ для первоначальнаго обученія. Нельзя этого сказать о многихъ другихъ предметахъ, въ томъ числѣ и о геометріи. Содержаніе послѣдней очень трудно поддается концентрическому расположенію, такъ какъ въ ней теорія гораздо сложнѣе и охватить ее всю въ короткое время почти что невозможно. Такіе предметы не должны входить въ кругъ предметовъ начальной школы *), если мы хотимъ дать учащимся основательныя знанія; мѣсто этихъ предметовъ—въ дальнѣйшемъ курсѣ (въ высшихъ отдѣленіяхъ городскихъ школъ и въ среднихъ школахъ).

Концентричность курса каждаго предмета начальнаго обученія полезна еще въ томъ отношеніи, что учащіеся, выходя изъ школы до окончанія курса (а такихъ учениковъ въ нашихъ народныхъ школахъ гораздо больше, чѣмъ оканчивающихъ курсъ), всетаки выносятъ изъ школы законченныя знанія. Обращаемъ на это вниманіе учителей. Ученикъ, пройдя первый отдѣлъ предлагаемаго курса ариѳметики, будетъ практически знать весь предметъ, въ значительной степени будетъ знакомъ и съ дробями (на что мы особенно напираемъ и что составляетъ одну изъ наиболѣе важныхъ

---

*) Во избѣжаніе недоразумѣній оговариваюсь: *свѣдѣнія* изъ этихъ предметовъ могутъ быть сообщаемы и въ начальныхъ школахъ, но *цѣлаго* предмета пройти нельзя; сообщеніе свѣдѣній по нѣкоторымъ изъ подобныхъ предметовъ можетъ быть полезнымъ и даже необходимымъ, но по неполнотѣ этихъ свѣдѣній особенно важнаго значенія для развитія учащихся онѣ имѣть не могутъ, т. е. такія свѣдѣнія могутъ быть лишь дополненіемъ къ курсу.

особенностей курса), хотя и не будетъ умѣть обращаться съ большими числами; даже ученикъ, пробывшій въ школѣ только одинъ годъ и вычислявшій лишь съ очень маленькими числами, будетъ обладать небольшими, но законченными знаніями.

Когда пройдены будутъ два отдѣла курса, каждое изъ основныхъ понятій предмета будетъ опредѣлено, но вполнѣ изучены будутъ только простѣйшіе случаи приложенія дѣйствій, т. е. дѣйствія надъ цѣлыми числами. Дальнѣйшія занятія должны выяснить учащимся новые, болѣе сложные случаи примѣненія дѣйствій, т. е. дѣйствія надъ дробями, и, наконецъ, соединить всѣ отдѣльныя обобщенія въ одно цѣлое, въ стройную теорію предмета. Дѣйствія надъ дробями настолько сложны, что, не смотря на подготовку учениковъ (прежними практическими упражненіями), разборъ дѣйствій надъ дробями и опредѣленіе ихъ берутъ много времени, а по важному значенію ихъ—должны составлять особый отдѣлъ курса. Выполненіе дѣйствій надъ дробями требуетъ новыхъ теоретическихъ объясненій свойствъ дробей и цѣлыхъ чиселъ, потому что при сложеніи и вычитаніи необходимо преобразовывать дроби (для приведенія ихъ къ одному знаменателю), а для облегченія всѣхъ дѣйствій необходимы другаго рода преобразованія, именно сокращеніе данныхъ, а, слѣдовательно, нужно знать и свойства чиселъ (раздѣленіе чиселъ на простыя и сложныя, нахожденіе дѣлителей данныхъ чиселъ, признаки дѣлимости и т. п.). Такимъ образомъ курсъ дробей вызываетъ необходимость познакомить учениковъ съ дальнѣйшимъ развитіемъ теоріи и съ усовершенствованіемъ вычисленій (сокращеніемъ выраженій). Свойства дробей, дѣйствія надъ ними, краткія свѣдѣнія о разложеніи чиселъ на множителей, о нахожденіи числа кратнаго даннымъ и указаніе признаковъ дѣлимости составляютъ содержаніе третьяго отдѣла предлагаемаго курса ариѳметики.

Соединеніе всѣхъ отдѣльныхъ обобщеній въ одно цѣлое (выработка теоріи) вмѣстѣ съ указаніемъ общихъ пріемовъ рѣшеній задачъ („правилъ“) по своему важному значенію должно составить особый отдѣлъ курса, поэтому для него долженъ быть выбранъ удобный періодъ времени, по возможности не раздѣляемый большими промежутками свободнаго времени, чтобы удобно было придать законченность пройденному матеріалу и произвести цѣльное

впечатлѣніе, а по окончаніи отдѣла—остановиться на краткомъ обзорѣ отдѣла. Этотъ новый (четвертый) отдѣлъ, разумѣется, можетъ имѣть мѣсто далеко не во всѣхъ школахъ; но въ тѣхъ, гдѣ времени на обученіе дается достаточно, онъ имѣетъ важное образовательное значеніе.

Такъ какъ курсъ ариѳметики заканчивается дѣтьми еще въ очень раннемъ возрастѣ (13—14, много если 15 лѣтъ), то послѣдній отдѣлъ все еще неудобно отвлеченно излагать ученикамъ; очень важно дать такой матеріалъ, который помогъ-бы обобщенію, приближаясь какъ къ дѣйствіямъ надъ дробями, такъ и къ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами. Ариѳметика настолько удобный въ учебномъ отношеніи предметъ, что даетъ возможность сдѣлать и это. Въ первой главѣ уже говорилось, что дѣйствія надъ дробями очень близки къ дѣйствіямъ надъ цѣлыми числами; существующая разница зависитъ отъ болѣе сложнаго выраженія дробей, чѣмъ цѣлыхъ чиселъ (дроби выражаются двумя числами: числителемъ и знаменателемъ); если уничтожить это различіе въ способѣ выраженія того и другаго рода чиселъ, то и различіе въ производствѣ дѣйствій исчезаетъ. Это дѣйствительно произойдетъ, когда данныя дроби обратимъ въ десятичныя, которыя могутъ быть написаны подобно цѣлымъ числамъ (въ одну строку съ цѣлыми числами); къ дѣйствіямъ надъ десятичными дробями вполнѣ могутъ быть примѣнены какъ правила дѣйствій надъ дробями, такъ и правила дѣйствій надъ цѣлыми числами *). (Дроби не всегда обращаются въ десятичныя, потому что не всякая дробь обращается въ конечную десятичную дробь, а употребленіе безконечныхъ десятичныхъ дробей не всегда удобно).

---

*) Для примѣра разсмотримъ правило умноженія. Относительно умноженія десятичныхъ дробей обыкновенно дается правило, прямо указывающее на сходство производства дѣйствія надъ десятичными дробями съ производствомъ его надъ цѣлыми числами: „умножаются какъ цѣлыя числа“; при умноженіи десятичныхъ дробей нужно только въ произведеніи надлежащимъ образомъ поставить запятую, чтобы точно обозначить разрядъ, къ которому относится полученный результатъ; при умноженіи-же цѣлыхъ чиселъ низшій разрядъ всегда одинъ и тотъ-же—единицы, поэтому и обозначать разряда нѣтъ надобности.

Замѣтивъ, что десятичная дробь, если не обращать вниманія на запятую, представляетъ числитель соотвѣтствующей ей обыкновенной дроби, легко понять, что, умножая десятичныя дроби какъ цѣлыя числа, мы перемножаемъ

Десятичныя дроби поэтому представляютъ естественный и вполнѣ удобный матеріалъ для указанія тѣсной связи между всѣми ариѳметическими вычисленіями, другими словами—существованія всего лишь четырехъ дѣйствій, производство которыхъ видоизмѣняется, смотря по тому, къ какого рода числамъ они примѣняются. При помощи десятичныхъ дробей для дѣтей становится *очевиднымъ,* что все содержаніе ариѳметики сосредоточивается на 4 дѣйствіяхъ, т. е. дѣти непосредственно наблюдаютъ, какъ обобщается все пройденное и создается теорія, а потому могутъ вполнѣ понять послѣднюю. Сдѣлавъ въ то же время указанія на общность пріемовъ рѣшеній однородныхъ задачъ и показавъ эти пріемы (задачи на „правила"), мы дополнимъ знанія учениковъ и еще разъ покажемъ возможность обобщать извѣстные намъ факты. Чувствуя, что, дойдя до теоріи, они лучше стали понимать все прежнее и даже не нуждаются въ особыхъ усиліяхъ, чтобы запомнить то, что давалось прежде съ трудомъ, ученики, можно надѣяться, поймутъ полезность теоріи и обобщеній и будутъ къ нимъ стремиться при всякой работѣ; правильная работа, которую вели ученики при занятіяхъ ариѳметикой и другими предметами, должна научить ихъ осмотрительно и правильно дѣлать обобщенія.

Итакъ, задача четвертаго отдѣла курса—объединеніе всего пройденнаго въ послѣдовательную теорію; а главнѣйшее содержаніе его: 1) ознакомленіе съ десятичными дробями, изученіе ихъ свойствъ и дѣйствій надъ ними и сравненіе ихъ съ дѣйствіями надъ обыкновенными дробями и надъ цѣлыми числами; 2) обобщеніе пріемовъ рѣшенія задачъ. Какъ дополненіе къ теоріи, если позволяетъ время, полезно сообщить тѣ теоремы, на которыхъ основываются объясненія признаковъ дѣлимости чиселъ и способовъ нахожденія наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго, а так-

---

числителей данныхъ дробей; поставивъ въ полученномъ произведеніи запятую, мы этимъ обозначаемъ разрядъ результата, т. е. обозначаемъ, какія доли получили, или, все равно, подписываемъ знаменателя произведенія. Въ произведеніи отдѣляется запятою столько десятичныхъ знаковъ, сколько было во множимомъ и во множителѣ вмѣстѣ; это значитъ, что подписанный въ произведеніи знаменатель есть произведеніе знаменателей данныхъ множителей.

Примѣръ: $0{,}2 \times 2{,}34 = 0{,}468$, или $\frac{2}{10} \times \frac{234}{100} = \frac{468}{1000} = 0.468$.

же познакомить со свойствами пропорцій и съ примѣненіемъ ихъ къ рѣшенію задачъ. (Раньше вводить пропорціи при рѣшеніи задачъ не слѣдуетъ, такъ какъ употребленіе пропорцій всегда пріучаетъ учащихся къ механическому рѣшенію задачъ, если дѣти раньше не дошли до рѣшенія подобныхъ задачъ по соображенію; въ концѣ курса указаніе на примѣненіе пропорцій къ рѣшенію задачъ можетъ быть полезно, какъ указаніе на *новый* пріемъ рѣшенія).

По мѣрѣ движенія курса впередъ должны измѣняться, какъ я говорилъ выше, и пріемы объясненій и требованія отъ учениковъ, а не только одно содержаніе даваемыхъ объясненій. При прохожденіи перваго отдѣла отъ учениковъ требуется *наблюденіе* надъ тѣмъ, что они дѣлаютъ съ числами; учитель въ это время даетъ матеріалъ для работы, спрашиваетъ учениковъ о томъ, что они дѣлаютъ, чтобы обратить ихъ вниманіе на ариѳметическія дѣйствія, отношенія чиселъ и пріемы рѣшеній задачъ, пріучаетъ учащихся къ извѣстнымъ формамъ записыванія того, что они дѣлаютъ, но самъ не даетъ ни объясненій, ни опредѣленій. Онъ, можно сказать, подчеркиваетъ ученикамъ упражненія, на которыя слѣдуетъ обратить особенное вниманіе, но не даетъ полныхъ объясненій ихъ. Учитель объясняетъ только въ тѣхъ случаяхъ, когда ученики почему-либо не могутъ сами *докончить* рѣшеніе начатой задачи или спутаютъ пройденное; если-же они сильно затруднятся вновь предлагаемыми упражненіями, то лучше отложить послѣднія на нѣкоторое время, но не объяснять ихъ.

При прохожденіи втораго отдѣла курса учитель также заставляетъ самихъ учениковъ дѣлать заключенія и выводы, старается натолкнуть ихъ и на опредѣленіе, но заканчиваетъ работу самъ, высказывая въ лучшей, обработанной формѣ тѣ опредѣленія, къ которымъ пришли дѣти, повторяетъ въ сжатомъ видѣ рядъ заключеній, приведшій къ опредѣленію, и даетъ названіе опредѣленному понятію (напримѣръ, дѣйствію, опредѣленіе котораго было составлено); послѣ того учитель опять переходитъ къ предложенію ученикамъ упражненій, ведущихъ къ укрѣпленію и выясненію тѣхъ понятій, которыя только что были опредѣлены. Повтореніе учителемъ того ряда заключеній, который довелъ до обобщенія, дѣлается съ цѣлью помочь учащимся легко обозрѣть весь ходъ вы-

вода, а слѣдовательно помочь имъ усвоить обобщеніе; опредѣленіе повторяется учителемъ для того, чтобы придать ему лучшую и болѣе точную форму и чтобы вмѣстѣ съ тѣмъ, предлагая образецъ точнаго и правильнымъ языкомъ выраженнаго опредѣленія, показать ученикамъ, какъ слѣдуетъ выражать опредѣленія, т. е. показать преимущества точнаго и сжатаго языка. Отъ учениковъ требуется не только наблюденіе надъ ходомъ работы при обобщеніяхъ и усвоеніе составленныхъ опредѣленій, но и умѣнье высказать усвоенное опредѣленіе, умѣнье объяснить его и привести соотвѣтственный примѣръ; все это ученикъ долженъ разсказывать послѣдовательно, безъ помощи учителя *). Повтореніе того опредѣленія, которое уже усвоено, и объясненіе его—не особенно затруднительны для учащихся, но очень полезны для нихъ, такъ какъ даютъ имъ возможность постепенно перейти отъ короткихъ отвѣтовъ на предложенные вопросы къ изложенію своихъ знаній и мыслей. Разсказъ о ходѣ рѣшенія задачи, какъ менѣе отвлеченный по своему содержанію, легче дается ученикамъ, и потому дѣти уже въ первый годъ обученія могутъ послѣдовательно излагать ходъ рѣшенія легкой задачи.

Когда ученики привыкли къ наблюденію, обобщенію и опредѣленіямъ, слѣдовательно привыкли вникать въ дѣло и усвоивать объясненія (при прохожденіи первыхъ двухъ отдѣловъ курса), учителю слѣдуетъ перейти къ *изложенію* объясненій нѣкоторыхъ частей курса, чтобы постепенно *пріучить учениковъ къ усвоенію чужой рѣчи* (къ сожалѣнію, въ настоящее время очень часто забываютъ объ этомъ); но въ то же время онъ не долженъ оставлять прежняго рода работъ: пересказа учениками усвоенныхъ ими частей курса и вывода новыхъ опредѣленій (путемъ обобщенія пройденнаго при помощи учителя). Предоставлять дѣлать выводъ самимъ ученикамъ слѣдуетъ въ тѣхъ случаяхъ, когда обобщеніе дѣлается легко, слѣдовательно правильно сдѣлать выводъ также не трудно (напримѣръ, можно предложить вывести правило сложенія или вычитанія дробей и т. п.); работа учениковъ при такомъ выводѣ

*) Учителя очень часто бываютъ настолько нетерпѣливы, что сейчасъ-же предлагаютъ вопросы, лишь только ученикъ на минуту остановится или затруднится выразить свою мысль, и этимъ мѣшаютъ ученикамъ пріучаться къ хорошему и обдуманному изложенію своихъ мыслей, мѣшаютъ ему думать.

должна быть еще болѣе самостоятельна, чѣмъ прежде, поэтому учитель, предложивъ сдѣлать обобщеніе, т. е. поставивъ общій вопросъ (напримѣръ, спросивъ послѣ разбора примѣровъ: какъ-же слѣдуетъ складывать дроби), долженъ стараться какъ можно меньше помогать учащимся наводящими вопросами, а если возможно, то и совсѣмъ воздержаться отъ послѣднихъ. Самъ учитель излагаетъ болѣе сложныя объясненія (напримѣръ, объясненіе того, какъ производится умноженіе дробей *), чтобы помочь учащимся въ трудныхъ случаяхъ и вмѣстѣ съ тѣмъ пріучать ихъ къ усвоенію содержанія чужой рѣчи. Ученикамъ легче усвоить выводъ, если онъ излагается учителемъ: они уже раньше привыкли дѣлать обобщенія, поэтому ходъ работы ихъ не затрудняетъ, а самое обобщеніе дается легче, если оно совершается безъ всякихъ уклоненій въ сторону или ошибокъ (почти неизбѣжныхъ при самостоятельной работѣ учениковъ), притомъ съ большею отчетливостью, полнотою и точностью, чѣмъ при самостоятельной работѣ дѣтей; опытный учитель умѣетъ и оттѣнить тѣ мѣста объясненія, которыя обыкновенно особенно сильно затрудняютъ учащихся. Учитель, конечно, въ первое время не ограничивается простымъ изложеніемъ объясненія: онъ повторяетъ сказанное, какъ только замѣтитъ недоумѣніе учащихся, измѣняя нѣсколько форму изложенія, въ случаѣ надобности приводитъ примѣръ, обращается иногда и съ вопросами къ ученикамъ, чтобы оживить ихъ и поддержать ихъ вниманіе.

Къ усвоенію плавной рѣчи, непрерываемой обращеніями къ учащимся, по моему мнѣнію, удобнѣе всего пріучать при повтореніи цѣлыхъ отдѣловъ курса; тогда продолжительность рѣчи не будетъ затруднять учениковъ, такъ какъ имъ будетъ извѣстно все, что говоритъ учитель, но прослушать учителя будетъ очень полезно дѣтямъ, такъ какъ связное изложеніе пройденнаго поможетъ имъ понять содержаніе *цѣлаго* отдѣла, чего учащіеся почти не могутъ достигнуть при прохожденіи отдѣла по частямъ. Отъ учениковъ учитель также требуетъ потомъ связнаго изложенія всего отдѣла **). Всѣ указанныя теперь новаго рода работы могутъ быть введены во время прохожденія третьяго отдѣла курса.

---

*) Ходъ работы будетъ изложенъ во второй части руководства.

**) Къ изложенію длинныхъ, но легкихъ объясненій дѣти могутъ пріучиться гораздо раньше: при пересказѣ рѣшеній задачъ, разсказахъ о производствѣ дѣйствій и т. п.

Дѣтей сильно затрудняетъ чтеніе книгъ серьезнаго содержанія, поэтому учителю необходимо обратить вниманіе и на то, чтобы выучить дѣтей читать серьезныя книги. Для достиженія цѣли надо заставить читать книги подъ руководствомъ и контролемъ учителя. Учащихся затрудняетъ собственно отвлеченность содержанія и сжатость изложенія, а помощи отъ другихъ въ случаѣ затрудненія (какъ это бываетъ при классной работѣ) они не получаютъ. Чтобы дѣтямъ былъ ясенъ смыслъ прочитаннаго, имъ слѣдуетъ давать для чтенія такія книги, содержаніе которыхъ имъ извѣстно и даже хорошо усвоено, такъ что трудность представляетъ только самое *чтеніе*. Таково назначеніе учебника въ школѣ. Вводить его слѣдуетъ при повтореніи всего курса, т. е. по окончаніи четвертаго отдѣла. Впрочемъ, если учащіеся работаютъ очень легко, то можно ввести учебникъ ариѳметики нѣсколько раньше, именно при прохожденіи курса дробей. Учебникъ долженъ дать учащимся образецъ хорошаго и сжатаго изложенія предмета: тогда только учебникъ поможетъ ученику охватить предметъ въ цѣломъ его объемѣ, такъ какъ только при этомъ условіи могутъ учащіеся въ короткое время *) прочесть книгу и обозрѣть весь предметъ.

Выше не разъ уже было высказано, что сообщаемыя знанія всегда должны быть тщательно подготовляемы и разрабатываемы во время классныхъ занятій, но въ учебникѣ слѣдуетъ излагать только тотъ результатъ, до котораго довелъ учитель своихъ учениковъ, т. е. въ учебникѣ должно быть дано изложеніе предмета (его теоріи), а не хода занятій, какъ это иногда дѣлается въ ущербъ ученикамъ. Такъ какъ чтеніе учебника должно помочь ученику выяснить себѣ теорію, то *правила вычисленій* слѣдуетъ *отдѣлять* отъ теоріи, чтобы ученики могли понять ихъ настоящее значеніе **); необходимо обратить вниманіе и на то, чтобы каждое отдѣльное объясненіе ясно выдѣлялось, но въ тоже время видна была бы и связь между всѣми отдѣльными объясненіями,

---

*) Многимъ читателямъ, я думаю, пришлось самимъ испытать, какъ много помогаетъ пониманію предмета повтореніе его въ цѣломъ объемѣ въ короткое время, напримѣръ, передъ экзаменами.

**) Они показываютъ тѣ пріемы письменныхъ вычисленій, которые всего скорѣе могутъ привести къ цѣли—нахожденію результата дѣйствій, но вполнѣ могутъ быть измѣняемы и при устныхъ вычисленіяхъ почти никогда не соблюдаются.

ясна была *вся* теорія. Характеръ объясненій долженъ быть одинаковъ во всемъ учебникѣ. Дѣлаю это замѣчаніе въ виду того, что въ современныхъ учебникахъ отдѣльныя объясненія не всегда согласованы между собою, даже часто носятъ совершенно случайный характеръ, а потому ученикамъ чрозвычайно трудно бываетъ замѣтить связь между всѣми объясненіями, слѣдовательно трудно понять теорію предмета, и поневолѣ приходится имъ заучивать правила и объясненія, отчего, конечно, сильно уменьшается образовательное значеніе ариѳметики.

(Учебники ариѳметики сороковыхъ годовъ были лучше современныхъ, такъ какъ въ нихъ болѣе сжато и ясно излагался предметъ, чѣмъ въ послѣднихъ, и къ изложенію предмета не примѣшивалось методическихъ указаній).

Итакъ, начиная съ рѣшенія практическихъ примѣровъ и разбора ихъ (наблюденія), ученикъ долженъ дойти до обобщенія и опредѣленія важнѣйшихъ ариѳметическихъ понятій и, наконецъ, расширяя пріобрѣтенныя знанія, дойти до обобщенія всѣхъ отдѣльныхъ объясненій, т. е. до выработки цѣлой теоріи—такова общая мысль предлагаемаго курса. Повторяю, что образовательная сила ариѳметики заключается главнымъ образомъ въ ней самой, въ ея краткой, безспорной, строгой, простой и доступной дѣтямъ теоріи, а не въ тѣхъ методахъ, которые прилагаются учителями. Методъ преподаванія можетъ *очень много облегчить* дѣтямъ усвоеніе предмета, или *можетъ*, наоборотъ, *путать* учащихся; но предметъ можетъ быть понятъ учениками независимо отъ принятаго метода преподаванія (даже при самообученіи, и тогда усвоенный предметъ точно также, силою своего содержанія, окажетъ образовательное вліяніе).

Значеніе, которое, по моему мнѣнію, имѣетъ теорія предмета, достаточно объясняетъ предлагаемый планъ курса.

Теперь, я надѣюсь, выяснилась основная мысль предлагаемаго курса ариѳметики и его значеніе въ ряду другихъ предметовъ школы; но для удачнаго выполненія всякаго плана большое значеніе имѣетъ тщательная обработка пріемовъ отдѣльныхъ объясненій и согласованіе ихъ между собою. Напоминаю только еще разъ, что пріемы работы могутъ быть значительно измѣняемы безъ измѣненія основной мысли курса, что каждому учителю полезно вво-

дить (хотя нѣкоторыя) свои собственные пріемы (такъ какъ у иныхъ учителей могутъ лучше удаваться одни пріемы, и другихъ другіе, но ведущіе къ той-же цѣли) и что начинающему учителю слѣдуетъ прежде всего обдумать планъ курса, а потомъ уже приниматься за занятія, чтобы всегда ясно сознавать, къ чему слѣдуетъ стремиться: тогда только можно скоро понять свои ошибки и понять тайну удачи.

Въ дополненіе привожу еще примѣрное распредѣленіе курса по годамъ.

---

## Первый отдѣлъ.

**ПЕРВЫЙ ГОДЪ. (4 часа въ недѣлю).**

Практическое ознакомленіе съ четырьмя ариѳметическими дѣйствіями путемъ рѣшенія задачъ у отвлеченныхъ примѣровъ съ первыми 20—30 числами.

Постепенное ознакомленіе при рѣшеніи задачъ съ отношеніями именованныхъ чиселъ.

Объясненіе значенія десятка.

Обозначеніе чиселъ цифрами, обозначеніе дѣйствій знаками. Записываніе найденныхъ рѣшеній задачъ. Записываніе хода отвлеченныхъ вычисленій.

Составленіе табличекъ сложенія и умноженія въ предѣлахъ извѣстныхъ ученикамъ чиселъ.

Указаніе на практическихъ задачахъ разностнаго и кратнаго отношеній чиселъ.

Простѣйшія вычисленія съ дробями.

---

**ВТОРОЙ ГОДЪ. (4—5 часовъ въ недѣлю). Первое полугодіе.**

Продолженіе прежняго рода упражненій, распространенныхъ на большія числа (до 100).

Указаніе пріемовъ вычисленій съ двузначными числами.

Упражненія въ отвлеченныхъ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ съ краткими объясненіями рѣшеній.

Пріученіе къ разсказу о ходѣ рѣшенія задачи, прежде чѣмъ будетъ сдѣлано вычисленіе рѣшенія.

Задачи и вычисленія съ дробными числами, имѣющими небольшихъ знаменателей и числителей.

---

## Второй отдѣлъ.

ВТОРОЙ ГОДЪ.
(4—5 часовъ въ недѣлю).
Второе полугодіе.

Опредѣленія четырехъ ариѳметическихъ дѣйствій. (Объясненія могутъ быть дополнены практическими указаніями на измѣненіе результатовъ дѣйствій при измѣненіи данныхъ). Отношенія чиселъ.

Повѣрка дѣйствій. Сравненіе ихъ.

Разборъ производства дѣйствій надъ именованными числами, а потомъ и надъ отвлеченными, въ предѣлѣ чиселъ первой сотни.

Вычисленія и задачи съ дробными числами.

---

ТРЕТІЙ ГОДЪ.
4 часа въ недѣлю.

Расширеніе предѣла чиселъ, вводимыхъ въ вычисленія и задачи, до 1000—10000.

Объясненіе системы счисленія. Сравненіе съ счисленіемъ именованныхъ чиселъ. Понятіе о метрической системѣ мѣръ длины и вѣса.

Производство дѣйствій надъ большими числами. Правила дѣйствій.

Рѣшеніе задачъ и объясненіе ихъ рѣшеній.

Задачи и вычисленія съ дробными числами, требующія преобразованія данныхъ дробей, напримѣръ приведенія къ одному знаменателю и т. д.

Повтореніе отдѣла.

---

## Третій отдѣлъ.

ЧЕТВЕРТЫЙ ГОДЪ.
4 часа въ недѣлю.

Объясненіе дѣйствій надъ дробями; объясненіе тѣхъ свойствъ дробей, которыми пользовались при практическихъ вычисленіяхъ.

Указаніе признаковъ дѣлимости чиселъ.

Разложеніе чиселъ на множителей и отысканіе общаго знаменателя данныхъ дробей.

Продолженіе прежняго рода упражненій въ вычисленіяхъ и въ рѣшеніи задачъ. Повѣрка задачъ. Пріученіе къ связному изложенію пройденнаго.

Повтореніе всего отдѣла.

---

## Четвертый отдѣлъ.

**Пятый годъ. 3—4 часа въ недѣлю.**

Десятичныя дроби. Производство дѣйствій надъ десятичными дробями.

Свойства десятичныхъ дробей.

Сравненіе производства дѣйствій надъ десятичными дробями съ дѣйствіями надъ обыкновенными дробями и цѣлыми числами.

Обращеніе обыкновенныхъ дробей въ десятичныя.

Безконечныя десятичныя дроби.

Обращеніе десятичныхъ дробей въ обыкновенныя.

Теоремы о дѣлимости чиселъ; примѣненіе ихъ къ доказательству признаковъ дѣлимости.

Объясненіе способовъ нахожденія общаго наибольшаго дѣлителя и наименьшаго кратнаго.

Обобщеніе пріемовъ рѣшеній задачъ. (Указаніе „правилъ").

Свойства пропорцій и примѣненіе ихъ къ рѣшенію задачъ.

Повтореніе всего курса по учебнику.

---

Эта программа можетъ быть выполнена въ продолженіе пяти лѣтъ въ такомъ училищѣ, гдѣ въ каждомъ классѣ одно или два отдѣленія, не больше. Если два отдѣленія въ классѣ, то лучше взять нѣсколько большее число часовъ: по 5 часовъ въ недѣлю (занимаясь во время урока съ двумя отдѣленіями) во 2, 3, 4 и 5 годы. Если же учитель вынужденъ заниматься съ тремя отдѣленіями одновременно, то курсъ придется продолжить еще на одинъ годъ, а именно слѣдуетъ: распространить занятія первымъ отдѣломъ курса на полные два года, вторымъ отдѣломъ заниматься годъ, употребляя на него 5—6 часовъ въ недѣлю, третьимъ отдѣломъ заниматься одинъ годъ, употребляя на занятія 5 часовъ въ недѣлю, а четвертый отдѣлъ распредѣлить на два года, занимаясь по 3 часа въ недѣлю.

Шестилѣтній курсъ, распредѣленный на два класса (съ двумя учителями) въ каждомъ, изъ которыхъ три отдѣленія, существуетъ въ очень немногихъ русскихъ школахъ; но за то почти во всѣхъ народныхъ школахъ нашихъ одинъ учитель долженъ заниматься съ тремя отдѣленіями, такъ какъ курсъ продолжается три года. Эти-то школы я главнымъ образомъ и имѣлъ въ виду, говоря о распредѣленіи занятій въ школѣ, въ которой три отдѣленія занимаются у одного учителя.

Полный курсъ ариѳметики въ народной школѣ, разумѣется, не можетъ быть пройденъ: занятія продолжаются въ ней слишкомъ короткое время. Но тѣмъ важнѣе дать въ народной школѣ *законченный* курсъ ариѳметики, знакомящій со всѣми основными ариѳметическими понятіями и со всякаго рода *необходимыми* вычисленіями, слѣдовательно и съ дѣйствіями надъ дробными числами. Не все можетъ быть объяснено ученикамъ, но на практическихъ отдѣльныхъ примѣрахъ все можетъ быть понято учениками народной школы, такъ что въ нетрудныхъ случахъ они смогутъ произвести всякое дѣйствіе и надъ дробными числами.

Изъ основной мысли предлагаемаго курса, если только мы успѣли достаточно хорошо ее выяснить, слѣдуетъ, что задача преподаванія ариѳметики, какъ одного изъ первыхъ предметовъ обученія, должна быть одинакова во всякой начальной школѣ, независимо отъ того, оканчиваютъ-ли въ ней курсъ учащіеся или должны будутъ продолжать свои занятія: всѣ начинающіе одинаково нуждаются въ объясненіи пріемовъ умственной работы и пріобрѣтеніи навыка въ такой работѣ, посредствомъ выполненія ея при изученіи наиболѣе доступныхъ имъ предметовъ, содержаніе-же ариѳметики вездѣ и для всѣхъ одинаково—поэтому, я думаю, нѣтъ надобности дѣлать какія-либо существенныя измѣненія въ этой программѣ въ случаѣ примѣненія ея въ народной школѣ. Въ ней я желалъ дать указанія именно на составъ такого курса, который практически познакомилъ-бы учащихся со всѣмъ содержаніемъ предмета и въ тоже время показалъ-бы имъ первые пріемы умственной работы: обобщеніе наблюденій. Послѣдніе два отдѣла курса составляютъ достояніе болѣе счастливыхъ учениковъ, которые могутъ не ограничиваться 3-лѣтнимъ ученьемъ. Мы думаемъ, что даже не окончивъ курса, ограничившись двухлѣтними заняті-

ями, ученикъ народной школы получитъ правильное понятіе о предметѣ и сможетъ произвести всякаго рада вычисленія надъ небольшими числами, а во многихъ случаяхъ справится и съ дробями. При обученіи въ народной школѣ необходимо только усилить занятія практическими вычисленіями, часто встрѣчающимися въ жизни. Указанный планъ, по моему мнѣнію, легко можетъ быть примѣненъ и къ тѣмъ случаямъ, когда преподаватель будетъ имѣть дѣло съ учениками уже знающими кое-что изъ ариѳметики, или со взрослыми учениками, но ничего не знающими. Какъ въ томъ, такъ и въ другомъ случаѣ должна быть сохранена главная мысль курса: сперва слѣдуетъ практически познакомить со всѣмъ предметомъ, а потомъ переходить къ выработкѣ теоріи; для пониманія теоріи предмета необходимо также достигнуть умѣнья быстро производить вычисленія и умѣть примѣнять дѣйствія къ рѣшенію задачъ. Въ разсматриваемыхъ теперь случаяхъ ходъ занятій, конечно, значительно ускоряется тѣмъ, что учащіеся, благодаря своимъ прежнимъ занятіямъ ариѳметикой или по своему возрасту, уже не затрудняются простѣйшими вычисленіями. Въ подобныхъ случаяхъ, чтобы выполнить планъ курса и достигнуть цѣли, мы совѣтуемъ всетаки прежде всего остановиться на упражненіяхъ въ рѣшеніи задачъ съ небольшими числами, чтобы пріучить учащихся къ быстротѣ вычисленій, развить въ нихъ умѣнье давать отчетъ въ томъ, что они дѣлаютъ и умѣнье слѣдить за мыслью объясненія. Когда это будетъ достигнуто—слѣдуетъ переходить къ выработкѣ опредѣленій дѣйствій и далѣе по плану. (Съ употребленіемъ дробей точно также слѣдуетъ знакомить постепенно при упражненіяхъ въ производствѣ вычисленій, а потомъ переходить къ выводу правилъ).

Чтобы лучше выяснить мысль предлагаемаго курса, выработаннаго, замѣтимъ кстати, путемъ опыта, присоединяю къ первой части еще одну главу.

---

# ГЛАВА ТРЕТЬЯ.

## Краткій очеркъ различныхъ системъ курса, предложенныхъ въ русскихъ руководствахъ къ преподаванію ариѳметики.

Мы сходимся со многими авторами руководствъ къ преподаванію ариѳметики въ основныхъ чертахъ курса (наглядность первоначальныхъ упражненій, ограниченіе ихъ въ первое время небольшими числами, совмѣстное ознакомленіе со всѣми 4 дѣйствіями и необходимость задачъ для усвоенія пройденнаго), хотя въ пониманіи каждой изъ нихъ и значеніи каждой въ ряду другихъ сильно расходимся. Для болѣе полнаго разъясненія дѣла я считаю полезнымъ указать теперь кратко на особенности наиболѣе вліявшихъ на учащихъ руководствъ.

Авторы многихъ руководствъ къ преподаванію считаютъ необходимымъ *изученіе чиселъ* *), понимая подъ этимъ наглядное (при помощи пособій) усвоеніе всѣхъ отношеній взятаго числа ко всѣмъ предыдущимъ; но въ выборѣ упражненій и значеніи, придаваемомъ упражненіямъ каждаго рода, авторы значительно расходятся. Прежде всего разногласіе существуетъ по вопросу о томъ, слѣдуетъ ли отношенія чиселъ изучать путемъ рѣшенія вопросовъ и задачъ, или они должны быть прежде усвоены на наглядныхъ пособіяхъ и потомъ приложены къ задачамъ. Во-вторыхъ, разногласіе существуетъ относительно того, насколько далеко должно простираться изученіе отдѣльныхъ чиселъ; въ третьихъ—въ вопросѣ: насколько многочисленны и насколько разнообразны должны быть упражненія съ дробями? Кромѣ указанныхъ главнѣйшихъ разногласій существуютъ еще второстепенныя. (Напр., по вопросу о томъ, когда слѣдуетъ познакомить дѣтей съ цифрами: въ самомъ началѣ занятій ариѳметикой или же лучше знакомить съ цифрами позже и т. п.). Къ сожалѣнію, общая цѣль упражненій часто теряется изъ виду изъ за увлеченія упражненіями какого-

*) Въ печати не разъ было высказываемо, что изученія отдѣльныхъ чиселъ не должно быть, но большая часть руководствъ къ преподаванію опирается на такіе именно взгляды.

нибудь одного рода; кромѣ того мало обращается вниманія вообще на необходимость постепенной выработки теоріи.

Самымъ важнымъ вопросомъ, по моему мнѣнію, является вопросъ о томъ, слѣдуетъ-ли сперва заставить учениковъ при помощи наглядныхъ пособій усвоить отношенія новаго числа ко всѣмъ предыдущимъ, а потомъ примѣнять ихъ къ задачамъ, или же слѣдуетъ и съ самыми отношеніями чиселъ знакомить путемъ рѣшенія задачъ. Г. Евтушевскій *), авторъ наиболѣе полнаго и самостоятельнаго изъ сочиненій о преподаваніи ариѳметики (напечатанныхъ на русскомъ языкѣ), находитъ наиболѣе удобнымъ дать ученикамъ наглядную таблицу разложеній числа на слагаемыя. (Составъ числа изъ единицъ, изъ двоекъ, троекъ и т. д., изъ каждаго числа по порядку до даннаго числа; если данное число заключаетъ въ себѣ меньшее число не цѣлое число разъ, то послѣднее слагаемое указывается отдѣльно. Составъ числа изъ другихъ чиселъ выражается не цифрами, а предметами, наглядными пособіями; каждое слагаемое выражается группой предметовъ, помѣщенныхъ на нѣкоторомъ разстояніи отъ другихъ). По этой таблицѣ ученики должны опредѣлять, сколько разъ каждое изъ меньшихъ чиселъ содержится въ данномъ, сколько останется отъ даннаго, если отнять отъ него меньшее число одинъ или нѣсколько разъ и т. д., т. е. должны *видѣть* результатъ каждаго изъ дѣйствій, производимыхъ надъ даннымъ числомъ. Эту табличку ученики должны настолько усвоить, чтобы давать требуемые отвѣты уже не видя передъ собою наглядныхъ пособій. Къ задачамъ ученики приступаютъ только тогда, когда могутъ сдѣлать каждое изъ дѣйствій надъ даннымъ числомъ; другими словами, усвоенныя отношенія чиселъ „прилагаются къ рѣшенію задачъ", какъ выражается и самъ авторъ. Я считаю такую постановку дѣла ошибочною. Цѣль занятій перваго времени обученія—ознакомить со всѣмъ предметомъ практически, заставивъ учащихся обратить вниманіе на то, что они дѣлаютъ съ числами безсознательно, и высказать сознанное; если ученикъ будетъ отчетливо понимать каждое упражненіе въ отдѣльности (и докажетъ это умѣньемъ объяснить все, что дѣлаетъ), то можетъ потомъ сознательно обобщить пройден-

*) Методика ариѳметики, сост. Евтушевскій.

ное, пойметъ теорію предмета и, работая такимъ образомъ, будетъ пріучаться правильно дѣлать выводы, т. е. будетъ привыкать съ правильной умственной работѣ. Но чтобы для ученика въ каждомъ отдѣльномъ случачѣ ясно было, какое вычисленіе дѣлается и какая его цѣль (или смыслъ), весьма важно, чтобы въ даваемыхъ примѣрахъ дѣйствія производились надъ именованными числами, или надъ числами, относящимися къ какимъ-нибудь предметамъ, но не отвлеченными: только тогда можно разсчитывать, что смыслъ дѣлаемаго вычисленія будетъ понятенъ ученику и вычисленіе будетъ его интересовать. Надо помнить, что дѣти никогда не думаютъ отвлеченно, потому что почти не упражнялись въ этомъ; а такъ какъ они еще не привыкли къ отвлеченнымъ соображеніямъ, то мало и интересуются ими, тѣмъ болѣе, что подобныя упражненія требуютъ отъ нихъ большой сосредоточенности, а они не привыкли къ ней и все окружающее легко ихъ развлекаетъ. Ребенокъ начинаетъ интересоваться отвлеченными ариѳметическими вычисленіями тогда, когда въ состояніи производить ихъ довольно легко и чувствуетъ, что можетъ дѣлать новую работу, т. е. сознаетъ свои умственные успѣхи; это-то сознаніе и побуждаетъ его къ дальнѣйшей работѣ и составляетъ причину охоты къ занятіямъ. На этомъ основаніи я и считаю необходимымъ знакомить учащихся съ отношеніями чиселъ на примѣрахъ съ именованными или съ конкретными (т. е. къ которымъ присоединяется названіе какихъ-либо предметовъ) числами; отвлеченныя же вычисленія должны даваться какъ выводы изъ предыдущихъ вычисленій съ именованными и конкретными числами, т. е. умѣнье отвлеченно вычислять должно быть результатомъ предшествующихъ упражненій съ конкретными числами.

Кромѣ того слѣдуетъ сказать, что система изученія чиселъ г. Евтушевскаго страдаетъ и другими недостатками. За „основное начало изученія каждаго числа“ онъ принимаетъ разложеніе числа на слагаемыя, такъ какъ думаетъ, что всѣ ариѳметическія дѣйствія могутъ быть замѣнены однимъ дѣйствіемъ—сложеніемъ. Я не стану здѣсь доказывать ошибочность подобнаго взгляда въ теоретическомъ отношеніи—это завлекло-бы меня въ сторону—достаточно сказать, что онъ приводитъ г. Евтушевскаго къ педагогической ошибкѣ. Требуя отъ учениковъ заучиванія таблички раз-

ложенія числа на слагаемыя и требуя, чтобы дѣти по этой табличкѣ находили результаты всѣхъ 4 дѣйствій надъ взятымъ („изучаемымъ“) числомъ, въ надеждѣ, что всѣ дѣйствія явятся въ глазахъ учениковъ „какъ упрощенія одного основнаго дѣйствія“ (т. е. сложенія), этимъ самымъ г. Евтушевскій заставляетъ учениковъ останавливаться на обобщеніи, прежде чѣмъ они усвоятъ частные случаи, т. е. каждое дѣйствіе въ отдѣльности, другими словами, способствуетъ *смѣшенію* всѣхъ представленій о дѣйствіяхъ; этимъ самымъ, вмѣсто того, чтобы обратить вниманіе учениковъ на то, что они знали и прежде, и довести до сознательнаго отношенія къ извѣстному *), г. Евтушевскій заставляетъ дѣтей учить искусственно придуманныя таблички, о которыхъ прежде ученикъ, разумѣется, не имѣлъ никакого понятія. Если въ школѣ прежде всего заставляютъ дѣтей обратить вниманіе на окружающее и на то, что имъ уже извѣстно, и заставляютъ сознательно отнестись ко всему этому, то мысль учащихся сильно возбуждается: они открываютъ новый смыслъ въ томъ, къ чему уже стали относиться невнимательно, чти считали извѣстнымъ; это возбуждаетъ интересъ учащихся и сразу ставитъ ихъ въ правильныя отношенія къ обученію. Если-же занятія въ школѣ начинаются съ искусственно придуманныхъ упражненій, совершенно чуждыхъ прежде дѣтямъ, то учащимся всегда невольно кажется, что въ школѣ учатъ чему-то особенному, существующему только въ школѣ и потому уже мало понятному, подобно тому, какъ физическія явленія, показываемыя на сложныхъ приборахъ, кажутся учащимся происходящими тслько въ этихъ приборахъ, а не въ природѣ, т. е. представляются чѣмъ-то въ родѣ искуснаго фокуса. При такихъ условіяхъ ученики сразу становятся въ неправильное отношеніе къ учебнымъ предметамъ и гораздо больше затрудняются, чѣмъ затруднялись-бы при другихъ условіяхъ. Чѣмъ искусствен-

*) Нѣтъ сомнѣнія, что каждый ученикъ (за весьма рѣдкими только исключеніями), поступающій въ школу, имѣетъ уже представленія о каждомъ изъ четырехъ дѣйствій; это доказывается тѣмъ, что онъ понимаетъ выраженія: прибавь къ двумъ камешкамъ еще два; сколько получится? возьми 4 раза по два яблока; сколько у тебя ихъ будетъ? раздѣли 6 пряниковъ на троихъ; сколько достанется каждому? Представленія о дѣйствіяхъ вырабатываются жизнью.

нѣе употребляемые пріемы (особенно при первоначальномъ обученіи), тѣмъ сильнѣе можетъ обнаружиться такая неправильность.

Работа, предлагаемая г. Евтушевскимъ при изученіи числа, благодаря употребляемымъ имъ табличкамъ разложенія и изученію состава числа на отвлеченныхъ примѣрахъ („выводы“ изъ таблички, представляющіе рядъ „вопросовъ на дѣйствія“ съ отвлеченными числами), очень отвлеченна, а потому утомительна и суха, слѣдовательно и скучна. (Наглядно составляется только табличка, дальнѣйшія упражненія должны „вытекать“ изъ этой таблички).

Когда ученики пройдутъ нѣсколько чиселъ (напр., дойдутъ до 20-ти), то у нихъ должны сохраняться представленія табличекъ разложенія на слагаемыя каждаго изъ 20 чиселъ; а такъ какъ всѣ дѣйствія „выводятся“ изъ сложенія и потому Евтушевскій не даетъ ученикамъ никакихъ пріемовъ вычисленій (результатъ дѣйствія виденъ изъ таблички разложенія на слагаемыя), то въ случаѣ забвенія таблички ребенокъ не имѣетъ возможности найти результатъ требуемаго дѣйствія, если только самъ не изобрѣлъ какихъ-нибудь пріемовъ вычисленій. На практикѣ, конечно, оказывается, что не только отчетливо представлять, но даже и *запомнить* таблички разложенія на слагаемыя даже и двадцати чиселъ нѣтъ возможности.

Но самъ г. Евтушевскій, оканчивая описаніе упражненій съ первыми двадцатью числами, говоритъ, что результатомъ занятій должно быть знакомство „съ главнѣйшими основными пріемами вычисленій“, хотя при описаніи самыхъ упражненій не дѣлаетъ никакихъ указаній на то, какъ указать эти пріемы ученикамъ, и не смотря на то, что ознакомленіе съ пріемами вычисленій совершенно противорѣчило-бы значенію таблицъ разложенія чиселъ на слагаемыя.

Но, употребляя таблички разложенія чиселъ на слагаемыя, Евтушевскій легко могъ достигнуть установленія простоты и ясности системы упражненій, одинаково продѣлываемыхъ надъ каждымъ числомъ, а потому его система легко можетъ быть усвоена каждымъ начинающимъ преподавателемъ, что и было одною изъ причинъ быстраго распространенія книги г. Евтушевскаго въ на-

чальныхъ школахъ *), книги тѣмъ болѣе удобной для употребленія, что всѣ упражненія надъ каждымъ числомъ въ отдѣльности описываются въ ней довольно подробно. Нѣтъ сомнѣнія, что отчетливость каждаго урока и строгость системы упражненій играютъ очень важную роль въ преподаваніи; необходимо даже, чтобы самъ ученикъ всегда сознавалъ, что сдѣлано на урокѣ, а также и за все время занятій, такъ какъ только при этомъ условіи мысль его будетъ всегда ясна и сознаніе своей работы будетъ удовлетворять его стремленію къ дѣятельности, его потребности въ сознаніи своей силы; но всякая система, какъ-бы она ни была ясна, можетъ быть хороша только тогда, если она естественна, соотвѣтствуетъ содержанію дальнѣйшихъ занятій и цѣлямъ школьной работы—обученію правильной умственной работѣ (посредствомъ усвоенія предлагаемаго учебнаго матеріала). Система упражненій съ первыми 20-ю числами (отчасти и далѣе), предлагаемая г. Евтушевскимъ, мало подготовляетъ къ дальнѣйшимъ занятіямъ ариѳметикой, потому что не помогаетъ различенію дѣйствій (которое достигается только при помощи задачъ, сопровождающихъ изученіе отдѣльныхъ чиселъ) и не знакомитъ съ пріемами производства дѣйствій надъ числами, состоящими изъ единицъ различныхъ разрядовъ, тогда какъ то и другое необходимо при выполненіи дѣйствій надъ большими числами: замѣна дѣйствій надъ ними сложеніемъ практически невозможна и каждое дѣйствіе надъ многозначными числами производится по разрядамъ. Однимъ словомъ, система изученія чиселъ г. Евтушевскаго болѣе легка и удобна для учителя, чѣмъ для ученика.

Книга г. Евтушевскаго почти совершенно вытѣснила изъ употребленія книгу г. Паульсона **), благодаря появленію которой новый методъ преподаванія ариѳметики впервые сталъ распространяться въ Россіи (съ 1860 г.). Одною изъ важнѣйшихъ причинъ такой замѣны, по моему мнѣнію, была именно бо́льшая опредѣленность и ясность предложенной г. Евтушевскимъ системы упражненій, что сдѣлало книгу очень удобной для употребленія; глав-

*) Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что разсматриваемая теперь часть книги Евтушевскаго—одна изъ слабѣйшихъ частей книги.

**) Ариѳметика по способу Грубе, Паульсона.

нѣйшія же основанія метода въ обѣихъ книгахъ очень сходны, какъ уже и говорилось прежде.

Въ руководствѣ Паульсона числа также изучаются каждое въ отдѣльности, но съ отношеніями чиселъ и результатами дѣйствій надъ ними онъ знакомитъ посредствомъ практическихъ вычисленій, облеченныхъ въ форму задачъ. Это большое преимущество системы Паульсона; дѣйствіе, которое надо сдѣлать для рѣшенія задачи, указывается самой постановкой вопроса, а потому ученики ясно видятъ смыслъ дѣйствія и пріучаются различать дѣйствія; начало занятій съ рѣшенія практическихъ вопросовъ—естественное начало занятій ариѳметикой. Однакоже пользоваться книгой г. Паульсона начинающему учителю довольно трудно, потому что предлагаемую имъ систему упражненій не такъ легко прослѣдить, какъ систему г. Евтушевскаго, не такъ легко ее выполнить; да и вообще на разъясненіе общей мысли курса г. Паульсонъ удѣлилъ очень немного мѣста, хотя и предназначалъ книгу „для людей, не имѣющихъ большаго навыка въ преподаваніи“ *).

Въ большинствѣ другихъ руководствъ къ преподаванію ариѳметики также изучаются отдѣльныя числа, но такъ какъ въ нихъ ничего почти не говорится о руководящей мысли курса, а все дѣло ограничивается описаніемъ упражненій, то и говорить о нихъ подробно я не буду. Упомяну о книгѣ г. Нагорскаго. Предлагаемая въ ней система упражненій крайне однообразна и утомительна, такъ какъ каждое изъ первыхъ 100 чиселъ изучается по одной и той же формѣ, и это продолжается 2—3 года; однакоже нельзя отнять отъ нея опредѣленности, перешедшей даже въ упорную неизмѣняемость до самаго конца, не смотря на три года занятій. Г. Нагорскій также начинаетъ изученіе числа съ практическихъ вычисленій (какъ и Паульсонъ), но потомъ быстро переходитъ къ составленію таблички результатовъ дѣйствій надъ даннымъ числомъ, т. е. не выдерживаетъ первоначальнаго направленія упражненій, хотя позже даетъ большое количество задачъ. Изученіе каждаго числа у г. Нагорскаго крайне усложняется вслѣдствіе одновременнаго ознакомленія учащихся съ соотвѣтствен-

*) Замѣчу здѣсь, что въ дальнѣйшихъ частяхъ курса книги г. Паульсона слабѣе книги г. Евтушевскаго.

ными долями числа (при изученіи двухъ—половины, трехъ—трети и т. д.).

Итакъ, въ большинствѣ руководствъ къ преподаванію ариѳметики первоначальныя занятія ариѳметикой лишь *сопровождаются* рѣшеніемъ задачъ, почему задачи даются *послѣ* изученія числа, тогда какъ, по моему мнѣнію, въ первое время занятія ариѳметикой должны *основываться* на рѣшеніи задачъ, такъ какъ слѣдуетъ начинать съ того, что извѣстно и *вполнѣ* понятно ученику. Книга г. Паульсона больше всѣхъ удовлетворяетъ такому требованію.

Авторы разсмотрѣнныхъ руководствъ, какъ видно изъ предыдущаго, находятъ нужнымъ вести изученіе отдѣльныхъ чиселъ, хотя никто изъ нихъ не объясняетъ, почему именно нужно изучать *каждое число* въ отдѣльности; обыкновенно говорится только о томъ, почему нужно начинать обученіе ариѳметикѣ съ чиселъ первой сотни и на упражненіяхъ съ ними познакомить со всѣмъ предметомъ.

Въ первыхъ двухъ главахъ я подробно объяснилъ, почему необходимо поступать такимъ образомъ; но для достиженія высказанной цѣли вовсе нѣтъ необходимости въ изученіи отдѣльныхъ чиселъ, какъ это думаютъ г. Паульсонъ и другіе; важно только одно: довести учащихся до сознательнаго усвоенія предмета и при этомъ научить правильно дѣлать выводы. Нѣкоторые авторы до такой степени увлекаются изученіемъ отдѣльныхъ чиселъ, что въ продолженіи 2—3 лѣтъ исключительно только этимъ и занимаются, какъ, напримѣръ, г. Нагорскій *), который одинаково ведетъ какъ изученіе числа 4 въ первый годъ занятій, такъ и числа, напримѣръ, 96 во время 3-го года занятій.

Какое же значеніе могутъ имѣть занятія, при которыхъ учащіеся въ продолженіи трехъ лѣтъ дѣлаютъ все одно и тоже? Г. Евтушевскій не до такой степени увлекается изученіемъ чиселъ: подробно разсмотрѣвъ каждое изъ первыхъ двадцати, остальныя числа первой сотни онъ разсматриваетъ менѣе подробно и вообще нѣсколько иначе ведетъ работу. Чѣмъ можетъ быть полезно изученіе чиселъ и чѣмъ опредѣляется предѣлъ, до котораго полезно доходить въ изученіи отдѣльныхъ чиселъ—говорилось въ первой главѣ.

---

*) Наглядная ариѳметика Нагорсакго. Спб. 1875 г.

При занятіяхъ съ очень мало развитыми дѣтьми употребленіе цифръ и записываніе примѣровъ цифрами въ первое время занятій, по мнѣнію нѣкоторыхъ преподавателей, можетъ вызвать въ головѣ ученика смѣшеніе понятій о числѣ и о цифрѣ. Особенно сильно настаиваетъ на этомъ г. Евтушевскій и потому совѣтуетъ знакомить съ цифрами только по изученіи чиселъ перваго десятка Другіе же вводятъ цифры съ самаго начала занятій (Нагорскій) и даже стараются выяснить различіе цифры отъ знака (Паульсонъ, который знакомитъ учениковъ съ цифрами послѣ изученія первыхъ трехъ чиселъ). Смѣшеніе числа съ цифрой, дѣйствительно, очень возможно, и потому лучше знакомить съ цифрами послѣ того, какъ учащіеся уже будутъ знакомы съ умственными вычисленіями: при этомъ условіи учащіеся, привыкнувъ къ употребленію чиселъ и увидѣвъ ихъ значеніе раньше, чѣмъ познакомятся съ цифрами, будутъ смотрѣть на записываніе чиселъ и вычисленій какъ на нѣчто новое, и это предохранитъ ихъ отъ ошибки. Но назначать, послѣ какого именно числа слѣдуетъ вводить цифры—вовсе нѣтъ надобности, важно только одно: отдѣлить представленіе о цифрѣ отъ представленія о числѣ, отдѣльно остановиться на тѣхъ и другихъ. Разъяснять же различіе цифры и числа нужно позже и дѣйствуя очень осторожно, указывая только, что цифрой обозначаютъ число, но цифры, изображающія одно и тоже число, могутъ быть различны (цифры на часахъ и т. п.), что цифры—значки, которыми обозначаются числа и т. п., т. е. разъяснять понятія слѣдуетъ указаніями на практическіе примѣры и сравненіями, но не слѣдуетъ *излагать* дѣтямъ своихъ объясненій.

Съ именованными числами многіе авторы совѣтуютъ знакомить постепенно во время изученія чиселъ первой сотни. Нѣкоторые знакомятъ съ ними позже. Употребленіе именованныхъ чиселъ много разнообразитъ и оживляетъ содержаніе упражненій всякаго рода (въ томъ числѣ и задачъ) и придаетъ имъ большую ясность; знакомство съ именованными числами имѣетъ и практическое значеніе, полезно и для послѣдующихъ теоретическихъ разъясненій; сами по себѣ дѣйствія надъ именованными числами никакихъ затрудненій не представляютъ. Всѣ эти доводы клонятся къ признанію полезности введенія именованныхъ чиселъ еще въ то вре-

мя, когда вычисленія дѣлаются только надъ числами первой сотни, и даже съ первыхъ уроковъ ариѳметики.

Третій существенный пунктъ разногласій—вопросъ о томъ, какого рода и въ какомъ количествѣ должны вводиться упражненія съ дробями при изученіи чиселъ первой сотни. Составители разсмотрѣнныхъ руководствъ совѣтуютъ знакомить съ дробями уже въ началѣ занятій, но характеръ предлагаемыхъ упражненій весьма различенъ. Г. Евтушевскій при изученіи отдѣльныхъ чиселъ знакомитъ только съ такими долями изучаемыхъ чиселъ, которыя представляютъ собою цѣлыя числа; такія вычисленія, конечно, не затруднятъ ученика; но очень жаль, что впослѣдствіи г. Евтушевскій почти совсѣмъ забываетъ о дробяхъ до третьяго года, когда начинается курсъ дробей, и тогда уже исключительно занимается дробями. Дѣтямъ всегда довольно трудно освоиться съ дробями, если они заранѣе не привыкли къ вычисленіямъ съ ними; затрудненіе учащихся зависитъ отъ большаго разнообразія вычисленій съ дробными числами (почему они въ первое время кажутся запутанными) и отъ необходимости измѣнить нѣсколько сложившіяся уже понятія о дѣйствіяхъ. Единственное средство предупредить затрудненія—постепенно подготовлять къ дѣйствіямъ надъ дробями, чтобы ученики успѣвали вполнѣ освоиться съ упражненіями одного рода прежде, чѣмъ перейдутъ къ другимъ и, постоянно примѣняя усвоенныя понятія о дѣйствіяхъ къ дробямъ, привыкали смотрѣть на вычисленія съ дробями какъ на тѣ же дѣйствія, что и надъ цѣлыми числами. Неизбѣжное разнообразіе упражненій съ дробями заставило г. Евтушевскаго на третій годъ занятій опять обратиться къ нагляднымъ пособіямъ и выяснять на нихъ шагъ за шагомъ каждое новое упражненіе. Этимъ самымъ, по моему мнѣнію, признается неудовлетворительность такихъ упражненій; къ чему же тогда служатъ всѣ прежнія занятія ариѳметикой (въ продолженіи $2^1/_2$ лѣтъ), если новаго рода упражненія приходится выяснять опять такимъ же способомъ, какимъ выяснялись самыя первыя упражненія? Неужели два съ половиной года занятій не въ состояніи научить дѣтей сколько-нибудь разсуждать? Необходимость постояннаго употребленія наглядныхъ пособій во время занятій съ дробями, повторяю, зависитъ только отъ неправильнаго распредѣленія занятій; вслѣдствіе этого только упражненія съ дробями кажутся запутанными, сбивчивыми.

Г. Паульсонъ, при изученіи отдѣльныхъ чиселъ, вводитъ нѣкоторыя упражненія съ дробями, но хотя и знакомитъ съ обозначеніемъ дробей, однако почти всегда ограничивается нахожденіемъ только такихъ долей, которыя сами представляютъ цѣлыя числа (находитъ *аликвотныя части* числа, какъ обыкновенно говорятъ). Послѣ изученія чиселъ перваго десятка, вмѣсто того, чтобы увеличить количество упражненій съ дробями и больше разнообразить упражненія, г. Паульсонъ также почти забываетъ о дробяхъ до третьяго года занятій, когда начинается курсъ дробей. Но г. Паульсонъ (въ этой части его книга представляетъ почти буквальный переводъ книги Грубе: „Руководство къ начальной ариѳметикѣ въ элементарной школѣ") даетъ курсъ еще гораздо болѣе слабый, чѣмъ курсъ дробей г. Евтушевскаго. У г. Паульсона курсъ дробей начинается изученіемъ каждой изъ шести послѣдовательныхъ долей (отъ $^1/_2$—$^1/_7$) въ отдѣльности, и изученіе ихъ ведется въ такомъ же порядкѣ, какъ и чиселъ перваго десятка. Но разсмотрѣвъ седьмыя доли, г. Паульсонъ, слѣдуя Грубе, вдругъ прерываетъ изученіе отдѣльныхъ долей, внезапно признавъ учащихся развитыми и способными непосредственно слѣдить за изложеніемъ предмета, способными усвоить объясненія свойствъ дробей и дѣйствій надъ ними. Но отчего именно нужно изучить ни болѣе, ни менѣе какъ седьмыя доли—остается неизвѣстнымъ. Думать, что ученики вдругъ могутъ сдѣлаться способными слѣдить за изложеніемъ учителя—совершенно неосновательно; одно изъ двухъ: или переходъ къ новаго рода работѣ будетъ для учениковъ невозможенъ, или упражненія, предшествующія этому рѣзкому переходу, совсѣмъ ненужны.

Г. Нагорскій впалъ въ противуположную крайность и трудно рѣшить, которая изъ нихъ хуже. Онъ при изученіи каждаго числа, начиная съ двухъ и доходя до 16, знакомитъ учащихся съ соотвѣтственными долями, т. е. при изученіи 2—съ $^1/_2$, при изученіи 3 — съ $^1/_3$ и т. д. Онъ не только находитъ такія доли изучаемыхъ чиселъ, которыя выражаются цѣлымъ числомъ, но производитъ всѣ дѣйствія надъ дробями, при сложеніи и вычитаніи приводитъ дроби къ одному знаменателю, умножаетъ дробь на дробь, однимъ словомъ изучаетъ настолько же подробно, насколько и цѣлыя числа.

Ученики должны страшно затрудняться такой громадной массой разнообразныхъ упражненій и, не будучи въ состояніи отчетливо понять дѣло, поневолѣ должны брать памятью. Между тѣмъ въ числѣ предлагаемыхъ упражненій много есть такихъ, которыя сами по себѣ хороши и могли-бы быть полезны, если ихъ предложить во время, не обременяя учениковъ. Если же всѣ эти упражненія собрать вмѣстѣ и дать ихъ начинающему ученику, какъ это дѣлаетъ г. Нагорскій (да исключить всякія объясненія въ продолженіи трехъ лѣтъ), то они задавятъ мысль ученика, уничтожатъ самостоятельность работы и разовьютъ лишь механизмъ вычисленій. Авторъ говоритъ въ предисловіи къ своей книгѣ: „хотя я старался сдѣлать это руководство вполнѣ понятнымъ для всѣхъ, но, чтобы имѣть возможность *устранить разомъ всѣ* утомительныя для читателя *толкованія и поясненія* и точнѣе указать весь ходъ преподаванія, я разсмотрю здѣсь число 12 и двѣнадцатыя доли“. Изъ этихъ словъ видно, что г. Нагорскій считаетъ *утомительнымъ* объясненіе характера и плана курса и даетъ только *описаніе* упражненій, дѣлаемыхъ при изученіи числа; такъ какъ для объясненія характера *всего* курса, продолжающагося три года, авторъ считаетъ вполнѣ достаточнымъ подробно указать ходъ изученія числа 12, изучаемаго въ началѣ курса, то это показываетъ, что, по сознанію самаго автора, въ 3-лѣтнемъ курсѣ ничего другаго и не заключается. (Описаніе хода занятій при изученіи числа 12 также никакихъ объясненій въ себѣ не заключаетъ). Понятно, что довольствуясь всегда однимъ производствомъ вычисленій, не понимая необходимости познакомить дѣтей съ теоріей предмета, необходимости пройти *ариѳметику,* а не придуманныя имъ упражненія, авторъ можетъ находить удовлетворительными тѣ знанія учениковъ, которыя могутъ быть пріобрѣтены ими при занятіяхъ по его курсу.

Вообще слѣдуетъ замѣтить, что только такой курсъ ариѳметики можно считать хорошимъ, который построенъ на разнообразныхъ упражненіяхъ, постоянно измѣняющихъ свою форму по мѣрѣ движенія курса: только при этомъ условіи возможно хорошо познакомить учащихся какъ съ практической, такъ и съ теоретической стороной дѣла и поддерживать въ нихъ интересъ къ занятіямъ; никакія упражненія не могутъ одинаково хорошо со-

дѣйствовать развитію той и другой стороны дѣла, тѣмъ болѣе, если они ведутся все въ одной и той же формѣ. Увлеченіе упражненіями какого-нибудь одного рода встрѣчается очень часто.

Кромѣ названныхъ выше руководствъ слѣдуетъ еще указать на „Практическую ариѳметику“ Гурьева, „Азбуку“ гр. Л. Толстого и „Методику ариѳметики“ Гольденберга, которыя отличаются отъ упомянутыхъ выше руководствъ.

Книга Гурьева первоначально была издана еще въ 1839 г.; тогда она была почти единственнымъ руководствомъ къ преподаванію ариѳметики, и для своего времени—хорошимъ руководствомъ, исполненіе совѣтовъ котораго могло улучшить распространенные въ то время пріемы преподаванія. Вновь издана она въ 1861 г., а въ 1880 г. вышла первая часть 3-мъ изданіемъ. Книги Гурьева нельзя давать въ руки маленькимъ дѣтямъ: они запутаются въ описаніи множества упражненій; скорѣе всего она можетъ служить (особенно вторая часть, гдѣ говорится о дробяхъ) руководствомъ для самообученія, такъ какъ авторъ очень много старался предусмотрѣть всѣ, даже мелкіе случаи, старался предугадать всѣ затрудненія учащихся; но для такихъ учащихся есть много ненужнаго въ книгѣ, именно совѣты, обращенные къ учителю, совѣты, которые составляютъ большую долю первой части. Но и для учителей эта книга въ настоящее время имѣетъ мало значенія: многаго нужнаго имъ, они не найдутъ въ книгѣ, и не мало найдутъ совсѣмъ ненужнаго.

Гурьевъ не разсматриваетъ отдѣльныхъ чиселъ, но во время занятій съ числами перваго десятка онъ вводитъ только два дѣйствія: сложеніе и вычитаніе, слѣдовательно, знакомитъ далеко не со всѣмъ предметомъ; это—очень большой недостатокъ. Кромѣ того, г. Гурьевъ, желая выяснить дѣтямъ вычитаніе или какое-нибудь другое дѣйствіе, старается привести всѣ возможные случаи, хоть сколько-нибудь разнящіеся другъ отъ друга по выраженію цѣли дѣйствія (десять безъ 2—въ остаткѣ 8, вычтя 3 изъ 10—получимъ 7, число семь двумя единицами больше 5, между 7 и 8 разность есть единица, 8 одною меньше 9 и т. д.), и при этомъ дѣлаетъ вторую важную ошибку: всѣ эти примѣры онъ приводитъ и разбираетъ подрядъ, даже не придавая имъ формы задачъ; дѣти, поэтому, не сами наталкиваются на всѣ эти случаи, не усваиваютъ

ихъ путемъ наблюденія, а должны запомнить ихъ: другаго средства въ подобныхъ случаяхъ нѣтъ. Этотъ недостатокъ еще болѣе усиливается тѣмъ, что г. Гурьевъ даетъ слишкомъ ужъ подробныя объясненія и этимъ самымъ мѣшаетъ ученикамъ различать, что особенно важно, что менѣе важно, такъ какъ обо всемъ говорится одинаково подробно, мѣшаетъ имъ думать. Теорія ариѳметики не высказывается опредѣленно и послѣдовательно, а растянута на двѣ большихъ книги (всего болѣе 300 страницъ),—поэтому-то книга Гурьева и не можетъ быть учебникомъ. Но книга г. Гурьева имѣетъ и хорошія стороны. Авторъ ея не увлекается изученіемъ чиселъ и обращаетъ вниманіе на пріемы вычисленій. Другая хорошая сторона книги та, что, познакомивъ съ дробями въ первое время обученія, Гурьевъ не забываетъ о нихъ впослѣдствіи, какъ это часто дѣлаютъ другіе, а постепенно вводитъ новыя упражненія, такъ что ко времени перехода къ курсу дробей (т. е. изложенію опредѣленій и правилъ) ученики будутъ значительно подготовлены къ нему.

Вообще-же говоря основная мысль книги, какъ высказываетъ ее авторъ въ предисловіи, довольно близка къ основнымъ положеніямъ метода преподаванія ариѳметики, высказаннымъ въ первой главѣ нашей книги (главнѣйшія особенности упомянуты). Въ частныхъ своихъ совѣтахъ, въ исполненіи метода г. Гурьевъ, къ сожалѣнію, постоянно себѣ противорѣчитъ.

Мысль о необходимости начинать занятія ариѳметикой съ упражненій надъ небольшими числами и знакомить съ содержаніемъ всего предмета (т. е. со всѣми дѣйствіями) въ возможно короткое время—настолько проста и естественна, что ей поддаются невольно даже противники того метода, основныя положенія котораго были высказаны въ первой главѣ.

Особенно любопытно видѣть это въ книгѣ гр. Л. Н. Толстого *), наиболѣе горячаго противника принимаемаго нами метода. Возставая вообще противъ метода Грубе (и противъ русскихъ его послѣдователей, особенно противъ г. Евтушевскаго), какъ метода, построеннаго, по его мнѣнію, на теоретическихъ соображеніяхъ, гр. Толстой приводитъ *свою* теорію преподаванія; говоря, что

*) „Азбука“ гр. Л. Н. Толстаго.

„единственнымъ методомъ долженъ быть опытъ“, а свобода— единственнымъ руководящимъ началомъ педагогики, гр. Толстой въ то же время подробно указываетъ въ какомъ порядкѣ необходимо вести занятія и какъ слѣдуетъ выражать объясненія—сильно себѣ противорѣчитъ.

Гр. Толстой начинаетъ занятія ариѳметикой съ упражненій въ счисленіи. Получаемыя при счетѣ числа онъ выражаетъ сперва словесно, потомъ славянскими цифрами и римскими цифрами, откладываетъ получаемыя числа на счетахъ и, наконецъ, выражаетъ ихъ арабскими цифрами.

Цѣль этихъ упражненій объясняется въ наставленіяхъ для учителей, помѣщенныхъ въ той-же азбукѣ.

„Тотъ, кто умѣетъ считать впередъ и назадъ до ста, говоритъ гр. Толстой, тотъ въ головѣ дѣлаетъ и сложеніе, и вычитаніе, и умноженіе, и дѣленіе, и возвышеніе въ степень, и извлеченіе корней“. Это большая ошибка. При счетѣ „впередъ и назадъ“ никакихъ дѣйствій вовсе не производится, хотя при счетѣ можно замѣтить, когда числа очень не велики, результаты названныхъ дѣйствій; это всего лучше доказывается тѣмъ, что не только дѣти, но и взрослые, умѣющіе считать, далеко не всегда могутъ производить дѣйствія надъ числами; дѣти даже очень часто научаются до школы считать до 10, 20 и далѣе, но не умѣютъ находить результатовъ дѣйствій. Самъ гр. Толстой говоритъ въ тѣхъ-же наставленіяхъ, что учить надо „осторожно, объясняя каждое дѣйствіе“. Римскія цифры и счеты гр. Толстой вводитъ для наглядности упражненій. Чтобы заставить учениковъ хорошо усвоить счисленіе, онъ даетъ очень большое количество упражненій; но при этомъ никакихъ объясненій ученикамъ онъ не даетъ, выводовъ не дѣлаетъ. Онъ ограничивается только тѣмъ, что послѣ длиннаго ряда упражненій въ вычисленіяхъ говоритъ ученикамъ: „если считаешь такъ: два да три будетъ пять, четыре и шесть будетъ десять, то дѣлаешь *сложеніе*; если считаешь такъ: пять безъ двухъ останется три, десять безъ шести останется четыре.. то дѣлаешь *вычитаніе*“. Подобнымъ-же образомъ указывается на умноженіе и дѣленіе. Такихъ замѣчаній, конечно, совершенно недостаточно для выясненія *понятій* о дѣйствіяхъ, и при такомъ веденіи дѣла не можетъ развиться въ учащихся сознательное от-

ношеніе къ работѣ. Между тѣмъ самъ-же гр. Толстой говоритъ, что „сообщеніе вывода тогда, когда ученикъ знаетъ дѣло, *не затруднитъ, а облегчитъ его*“. Но и послѣ этихъ словъ гр. Толстой опять заставляетъ учениковъ дѣлать только механическія упражненія, не заботится объ объясненіи ихъ. Такими противорѣчіями наполнена вся книга.

И такъ, гр. Толстой, не смотря на горячее осужденіе основныхъ началъ распространеннаго въ настоящее время метода преподаванія ариѳметики, въ сущности пришелъ къ тому, что и самъ ограничиваетъ первыя ариѳметическія упражненія небольшими числами, придумываетъ для облегченія пониманія ихъ наглядныя пособія и стремится отыскать въ счетѣ „впередъ и назадъ до ста“ объединяющее начало всего курса, находитъ необходимыми эти упражненія въ счетѣ именно какъ знакомящія (будто-бы) со всѣми ариѳметическими дѣйствіями, слѣдовательно, считаетъ необходимымъ въ первое-же время занятій познакомить со всѣмъ предметомъ. Все это—общепринятыя основанія метода. Но при выполненіи курса гр. Толстой совершенно теряетъ изъ виду эту мысль, не можетъ сознать ея и провести черезъ весь курсъ, а потому постоянно самъ себѣ противорѣчитъ; онъ не сознаетъ необходимости заставлять работать мысль ученика, и это почти уничтожаетъ полезное вліяніе занятій ариѳметикой; не будучи самъ послѣдовательнымъ, онъ даетъ и упражненія недостаточно выработанныя, не составляющія стройнаго цѣлаго, хотя между этими упражненіями есть и хорошія, и даже очень хорошія упражненія.

Отъ дѣйствій гр. Толстой переходитъ къ изученію дробей; пріемы его при этомъ рѣзко измѣняются. Вмѣсто того, чтобы давать по прежнему механическія упражненія, говоря о необходимости ограничивать занятія чисто-практическими вычисленіями, гр. Толстой вдругъ переходитъ къ теоріи и прежде всего объясняетъ, что дроби составляютъ „продолженіе ряда цѣлыхъ чиселъ“, а дроби, имѣющія различныхъ знаменателей суть числа, выраженныя по „различнымъ счисленіямъ“. Здѣсь онъ видимо хочетъ провести обобщающее начало всего курса. Не говоря уже о томъ, что такое обобщеніе вовсе не легко дается маленькимъ дѣтямъ, что послѣднія нисколько не подготовлены къ такому обобщенію предыдущими занятіями, такъ какъ гр. Толстой вовсе не училъ ихъ обоб-

щать и даже не давалъ никакихъ объясненій, я укажу только на то, что гр. Толстой впадаетъ въ крупную теоретическую ошибку: дроби нельзя принимать за числа, выраженныя по различнымъ системамъ счисленія, если числитель больше знаменателя или даже только больше 9 (въ противномъ случаѣ онъ уже непремѣнно выраженъ по десятичной системѣ). Существованіе ошибки въ объясненіяхъ, разумѣется, не позволяетъ давать основательныя объясненія. А познакомиться съ дробями дѣтямъ гораздо легче непосредственно, чѣмъ знакомиться прежде съ различными счисленіями, а потомъ уже съ дробями. Самъ-же гр. Толстой говоритъ, что дѣти, поступающія въ школу, всегда уже нѣсколько знакомы съ дробями (съ $^1/_2$, $^1/_4$); зачѣмъ-же вводить искусственныя, трудныя и ошибочныя объясненія, когда можно воспользоваться уже имѣющимися у дѣтей представленіями о дробяхъ.

Увлеченный выдуманнымъ имъ пріемомъ разсмотрѣнія дробей, гр. Толстой идетъ еще дальше и придумываетъ рядъ очень сложныхъ пріемовъ вычисленій съ дробями. Достаточно сказать, что вычисленіе общаго знаменателя двухъ дробей занимаетъ у него цѣлую страницу (все мѣсто занято только вычисленіями). Это, впрочемъ, не мѣшаетъ ему увѣрять, что предлагаемый имъ пріемъ особенно *легко* дается дѣтямъ; намъ же не разъ приходилось убѣждаться, что и взрослые люди, знакомые съ ариѳметикой и самой разнообразной подготовки, плохо понимаютъ предлагаемый имъ пріемъ.

Говоря о различныхъ руководствахъ къ преподаванію ариѳметики, слѣдуетъ упомянуть еще о руководствѣ, появившемся въ послѣдніе годы, именно о „Методикѣ ариѳметики“ Гольденберга. Руководство это несомнѣнно полезно, особенно хорошо развито авторомъ обученіе вычисленіямъ, но основы метода гораздо ближе къ тѣмъ, которые предлагались и раньше, нежели думаетъ самъ авторъ, а потому для выясненія основаній предлагаемаго курса подробнѣе излагать содержаніе ея не видимъ необходимости.

Теперь я считаю нужнымъ сказать нѣсколько словъ о той системѣ, въ которой, по мнѣнію составителей руководствъ, слѣдуетъ предлагать дѣтямъ обобщенія.

Во 2-й главѣ я говорилъ, что прежде всего слѣдуетъ остановиться на опредѣленіи понятій о дѣйствіяхъ, какъ важнѣйшихъ ариѳметическихъ понятіяхъ, и притомъ наиболѣе подготовленныхъ

предыдущими занятіями, такъ что чувствуется потребность въ окончательномъ опредѣленіи ихъ. Вслѣдъ затѣмъ слѣдуетъ остановиться на выработкѣ понятія о системѣ счисленія и указать на значеніе числа; познакомивъ съ системой счисленія, слѣдуетъ объяснить и производство дѣйствій надъ большими числами. На опредѣленіяхъ дѣйствій выгодно остановиться раньше, чѣмъ на объясненіи системы счисленія, еще и потому, что тогда ученики могутъ хорошо усвоить основанія производства дѣйствій (производство ихъ по разрядамъ и опредѣленіе разряда результата) на вычисленіяхъ съ небольшими числами (двузначными), и когда вполнѣ познакомятся съ системой счисленія, легко могутъ перейти къ усвоенію механизма дѣйствій надъ большими числами; если же дѣти раньше не усвоятъ основныхъ правилъ производства дѣйствій, то сложность вычисленій съ большими числами настолько затруднитъ учащихся, что они принуждены будутъ усвоить механизмъ дѣйствій путемъ навыка, недостаточно сознательно, или должны будутъ очень долго сидѣть на упражненіяхъ въ производствѣ дѣйствій; однообразіе же занятій всегда дѣйствуетъ утомительно.

Такого же порядка обобщеній держится и г. Евтушевскій. Г. Паульсонъ поступаетъ обратно тому и этимъ много вредитъ курсу; не давая дѣтямъ обобщеній очень долгое время и знакомя прежде всего съ системой счисленія, онъ дѣлаетъ курсъ первыхъ 2-хъ лѣтъ безсодержательнымъ, не доводящимъ учениковъ до яснаго сознанія пройденнаго въ теченіи этихъ 2-хъ лѣтъ, а потомъ принужденъ давать длинные, скучнѣйшіе и утомительнѣйшіе ряды упражненій въ производствѣ дѣйствій надъ большими числами.

Въ книгѣ г. Гурьева, какъ соединяющей съ руководствомъ къ преподаванію учебникъ для самообученія, опредѣленія даются въ томъ же порядкѣ, въ какомъ даются во всѣхъ учебникахъ собственно, но только даются послѣ практическаго ознакомленія читателей съ ариѳметикой посредствомъ вычисленій съ числами первой сотни.

Въ „Азбукѣ" гр. Толстаго весь курсъ построенъ на усвоеніи системы счисленія. Счетъ „впередъ и назадъ" по его мнѣнію въ сущности замѣняетъ всѣ дѣйствія, которыя, по этому, почти и не объясняются имъ. Отъ практическихъ упражненій въ вычисленi-

яхъ гр. Толстой переходитъ прямо къ десятичнымъ дробямъ, разсматривая ихъ „какъ продолженный *меньше единицы* рядъ счисленія“, а потомъ уже переходитъ къ обыкновеннымъ дробямъ, тоже принимая ихъ за продолженіе цѣлыхъ чиселъ, только выраженныхъ „въ разныхъ счисленіяхъ“ (съ различнымъ основаніемъ). Я уже говорилъ выше, что подобныя объясненія допускать неудобно, такъ какъ они неправильны. Переходъ отъ практическихъ упражненій къ обобщенію, охватывающему весь курсъ, черезчуръ рѣзокъ и долженъ быть или страшно тяжелъ для дѣтей, или совсѣмъ невозможенъ для нихъ.

Курсъ дробей поставленъ во всѣхъ руководствахъ неудовлетворительно. Напомню, что курсъ дробей во всѣхъ руководствахъ слишкомъ обособляется отъ всего остальнаго курса, тогда какъ онъ, подобно другимъ частямъ курса, долженъ вытекать изъ предшествующаго, долженъ явиться обобщеніемъ пройденнаго, и потому долженъ быть подготовляемъ постепенно.

О томъ, какъ довести до конца курсъ ариѳметики, какъ окончательно выработать теорію—говорится только въ книгѣ г. Евтушевскаго, но и то отрывочно и, главное, не особенно удачно: характеръ работы не измѣняется до самаго конца. Правда, г. Евтушевскій говоритъ въ общихъ примѣчаніяхъ для учителей, что характеръ занятій долженъ измѣниться, но какъ сдѣлать это — не указываетъ, а при объясненіи пріемовъ рѣшеній задачъ на тройныя правила (въ самомъ концѣ курса) даетъ такіе совѣты относительно веденія дѣла, которые не измѣняютъ прежняго характера работы.

---

# ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ.

## О задачахъ.

Значеніе задачъ въ курсѣ ариѳмитики; основанія подбора задачъ; пріемы классной работы; письменныя упражненія.

Выше уже было сказано о важномъ значеніи упражненій въ рѣшеніи задачъ для подготовки учащихся къ теоретическимъ объясненіямъ, для разработки и закрѣпленія пройденнаго и, наконецъ, для развитія въ учащихся навыка пользоваться пріобрѣтенными знаніями при самостоятельномъ рѣшеніи вопросовъ, относя-

щихся къ предмету. Такое разнообразное пользованіе задачами при занятіяхъ ариѳметикой (во всѣхъ отдѣлахъ курса) указываетъ на необходимость особенно тщательной разработки пріемовъ работы надъ задачами, и потому мы имъ посвятимъ особую главу.

По общей мысли курса каждому теоретическому объясненію предшествуетъ практическое ознакомленіе учащихся съ тѣми вопросами и понятіями, которые потомъ разъясняются теоретически. Напримѣръ, прежде чѣмъ перейти къ объясненію того, что мы называемъ сложеніемъ, вычитаніемъ, или вообще дѣйствіемъ, ученикамъ предлагается рядъ такихъ вопросовъ (съ небольшимии числами), на которые дѣти могутъ отвѣтить ничего не зная объ ариѳметическихъ дѣйствіяхъ (на одной скамейкѣ сидятъ два ученика, да на другой три, сколько всего учениковъ сидитъ на скамьяхъ? мальчикъ за булку, которая стоитъ три копѣйки, далъ пятачекъ, сколько ему дали сдачи? и т. п.). Отвѣтивъ на рядъ подобныхъ вопросовъ, учащіеся будутъ понимать смыслъ вычисленія и потому смогутъ безъ большихъ затрудненій усвоить *понятіе* о дѣйствіи. Но, чтобы подобныя упражненія могли привести къ цѣли, могли *помочь пониманію* сообщаемыхъ объясненій, *безусловно необходимо*, чтобы смыслъ дѣлаемыхъ вычисленій былъ совершенно ясенъ, даже указывался самой постановкой вопроса, чтобы при рѣшеніи вопроса преподаватели заставляли учащихся разсказывать о томъ, *какъ* они нашли число (а не заставляли бы только давать отвѣтъ, называть искомое число) и объяснять, *что* нужно дѣлать съ числомъ. Такое раздѣленіе упражненій въ объясненіи того, *что* дѣлается съ данными числами отъ того, *какъ* это дѣлается, необходимо для предупрежденія возможности смѣшенія понятій и для пріученія дѣтей къ сосредоточенію усилій на одномъ вопросѣ. Можетъ быть нѣкоторымъ покажется, что объяснять все это—излишне, что каждый учитель самъ хорошо понимаетъ необходимость раздѣленія труда... На практикѣ, скажу я, одна изъ наиболѣе часто повторяемыхъ ошибокъ стремленіе на разборѣ одного или немногихъ примѣровъ спросить обо всемъ, что проходилось, а это заставляетъ учителя долго останавливаться надъ одной задачей, до того долго, что послѣдняя надоѣдаетъ учащимся, рѣшеніе же ея кажется сложнымъ; а какъ скоро мысль ребенка запутывается, онъ уже перестаетъ надъ ней работать... значительная часть за-

траченнаго труда теряется непроизводительно. Кромѣ того, ученики труднѣе понимаютъ упражненія каждаго рода, если послѣднія очень быстро смѣняютъ другъ друга: дѣти смѣшиваютъ одну работу съ другой. Быстрая смѣна однихъ упражненій другими возможна только при повтореніи пройденнаго и служитъ однимъ изъ лучшихъ средствъ оцѣнки того, насколько учащіеся усвоили пройденное; быстрый переходъ отъ однихъ упражненій къ другимъ потому и можетъ служить средствомъ повѣрки знаній, что затрудняетъ учащихся, пока они еще не вполнѣ овладѣли дѣломъ.

Итакъ, при занятіяхъ съ дѣтьми ариѳметикой слѣдуетъ воздерживаться отъ продолжительнаго разбора одного какого-нибудь примѣра, стараясь всегда какъ можно точнѣе опредѣлять цѣль разбора и останавливаясь всегда на чемъ-нибудь одномъ: или на объясненіи смысла вычисленія, или на разборѣ хода вычисленія и т. д.

Слѣдуетъ еще замѣтить, что учитель не только долженъ самъ имѣть опредѣленную цѣль, предлагая ученикамъ задачу, но долженъ позаботиться и о томъ, чтобы ученики ясно понимали, чего отъ нихъ требуютъ. Многія неудачи учителей происходятъ только отъ непониманія учащимися требованій учителя, который въ свою очередь не понимаетъ, чѣмъ затрудняются ученики. Однимъ словомъ, мы приходимъ къ вопросу о томъ, какъ слѣдуетъ ставить упражненія, какъ вести дѣло.

Съ какою бы цѣлью не предлагалась задача, необходимо, чтобы учащіеся усвоили ея содержаніе, иначе они не могутъ правильно думать о способѣ ея рѣшенія и всегда говорятъ на угадъ. Въ руководствахъ къ преподаванію ариѳметики предлагаются различныя средства достиженія указанной цѣли, но чаще всего совѣтуется требовать отъ нѣсколькихъ учениковъ повторенія содержанія задачи, а за рѣшеніе ея приниматься лишь тогда, когда учитель убѣдился, что ученики усвоили содержаніе прочтенной задачи. Съ своей стороны мы считаемъ описанные пріемы неудобными и даже вполнѣ безполезными.

Единственно разумная, по нашему мнѣнію, постановка дѣла— требованіе, чтобы ученики усвоивали тотчасъ же содержаніе задачи, а для повѣрки вниманія учащихся—повтореніе содержанія задачи кѣмъ либо изъ нихъ (по назначенію учителя, а не изъ числа поднимающихъ руку въ знакъ желанія повторить условія задачи),

однако же не болѣе одного раза, рѣдко двухъ, только въ исключительныхъ случаяхъ. Ученики хорошаго учителя непремѣнно отличаются тѣмъ, что для нихъ не нужно нѣсколько разъ повторять задачу, развѣ только придется повторить содержаніе трудной задачи. Требовать отъ учениковъ, чтобы они запоминали содержаніе задачъ необходимо, такъ какъ при этомъ только условіи могутъ они соображать, что слѣдуетъ сдѣлать съ данными числами; если условія повторяются нѣсколько разъ, то на это уходитъ очень много времени даромъ. Еще важнѣе другая причина. Обычай нѣсколько разъ повторять содержаніе задачи всегда внушаетъ многимъ ученикамъ мысль, что не стоитъ особенно внимательно слушать чтеніе задачи: содержаніе будетъ еще повторено. Учитель замѣчаетъ, что нѣкоторые ученики не слушаютъ, заставляетъ ихъ повторить содержаніе задачи; а пока они повторяютъ, нѣкоторые уже успѣваютъ забыть содержаніе прочитаннаго, такъ что необходимо повторить его еще разъ. Мы не разъ бывали свидѣтелями, какъ повторялась задача нѣсколько разъ и всетаки содержаніе ея не было усвоено всѣми учениками. Однимъ словомъ, необходимость многократнаго повторенія содержанія предложенной задачи *вызывается* самымъ обычаемъ повторенія; само по себѣ оно вовсе не нужно и даже вредно, какъ развивающее дурныя привычки въ дѣтяхъ, дурное отношеніе къ дѣлу. Вліяніе этого обычая можно сравнить съ тѣмъ вліяніемъ, которое оказываетъ на дѣтей обычай многихъ родителей приглашать репетиторовъ (т. е. домашнихъ учителей, повторяющихъ съ дѣтьми прослушанные послѣдними уроки въ классѣ и разъясняющихъ пройденное), хотя крайности вовсе нѣтъ: дѣти невольно приходятъ тогда къ заключенію, что въ классѣ имъ не нужно слушать объясненій, они получатъ ихъ дома, въ классѣ же пріятнѣе развлечься чѣмъ нибудь постороннимъ, а дома въ этомъ отношеніи меньше соблазна, да и все равно—заниматься необходимо.

Между тѣмъ пріучить учениковъ къ усвоенію содержанія задачи (не повторяя его нѣсколько разъ) нисколько не трудно: стоитъ только начать съ предложенія задачъ несложныхъ по содержанію и не длинныхъ, съ небольшими числами, чтобы учащіеся могли легко удержать въ памяти прочитанное, но надо сказать предварительно ученикамъ, что они должны слушать чтеніе задачи и за-

помнить содержаніе, нужно сильно на этомъ настаивать, требовать повторенія условій, не соглашаясь вновь прочитать задачу (всегда найдется въ классѣ ученикъ, могущій повторить задачу); другіе же, видя, что учитель требуетъ повторенія, привыкаютъ слушать. Привычка къ усвоенію содержанія легко пріобрѣтается въ какихъ-нибудь 2—3 мѣсяца.

Что сказано относительно усвоенія содержанія, тоже самое слѣдуетъ сказать и о числахъ: дѣти должны пріучаться запоминать ихъ, такъ какъ помня данныя числа гораздо легче придумать пріемъ рѣшенія. Пріучать учащихся къ запоминанію чиселъ слѣдуетъ постепенно; трудныя числа (большія) можно записывать на доскѣ, если ученики худо ихъ запоминаютъ. Не слѣдуетъ также выспрашивать каждый разъ, какія числа даны, какія ищутся; къ подобнымъ вопросамъ можно обращаться только въ случаѣ затрудненія учащихся; важно, чтобы послѣдніе пріучены были тотчасъ-же обращать вниманіе на значеніе чиселъ, не ожидая вопроса учителя. Кромѣ того, однообразіе подобныхъ вопросовъ дѣлаетъ ихъ очень надоѣдливыми.

Для объясненія дѣтямъ, что именно требуется отъ нихъ, нужно подробно разобрать какую-нибудь задачу (показать примѣръ) и сказать, что такъ нужно и въ другихъ случаяхъ поступать.

Какимъ бы образомъ ни велись занятія, во всякомъ случаѣ чрезвычайно важно пріучать дѣтей къ отчетливому объясненію того, что они дѣлаютъ, будетъ ли это простое вычисленіе или рѣшеніе сложной задачи. Не нужно требовать подробнаго объясненія при каждой задачѣ, а тѣмъ болѣе при каждомъ вычисленіи, но безусловно необходимо добиться отъ учениковъ умѣнья объяснить, въ случаѣ требованія, все, что они дѣлаютъ, и пріучать учащихся *всегда* обдумывать, какъ рѣшить задачу или вести сложное вычисленіе *прежде*, чѣмъ приняться за то или другое. Эти требованія имѣютъ важное значеніе какъ для пріученія дѣтей къ правильнымъ пріемамъ работы и развитія учащихся, такъ и для пониманія каждаго рода упражненій въ отдѣльности. На практикѣ нерѣдко оказывается, что учащіеся пріобрѣтаютъ механическій навыкъ въ рѣшеніи задачъ или въ вычисленіяхъ, но не понимаютъ ихъ смысла, ничего не умѣютъ объяснить изъ того, что дѣлаютъ. Пользы отъ такого знанія, конечно, немного; всякія новыя объясненія такимъ

ученикамъ трудно даются, потому что послѣдніе стараются замѣтить какіе-нибудь внѣшніе признаки хода вычисленія или рѣшенія задачи, вмѣсто того, чтобы стараться уловить ихъ смыслъ. Тотъ же самый недостатокъ составляетъ причину такъ часто встрѣчающихся постоянныхъ затрудненій учащихся въ самыхъ обыкновенныхъ упражненіяхъ, какъ только въ нихъ встрѣчается малѣйшее отступленіе отъ обычной формы условій, даже простая перестановка данныхъ: не слѣдя за смысломъ рѣшенія и даже не умѣя слѣдить за нимъ, дѣти, разумѣется, постоянно сбиваются при всякой перемѣнѣ формы. Та же причина развиваетъ въ ученикахъ привычку (весьма распространенную между ними) пробовать всякія дѣйствія надъ данными числами, хотя бы они не имѣли никакого смысла въ примѣненіи къ вопросу, лишь бы только получилось требуемое число. Дѣло доходитъ иногда до того, что нѣкоторые ученики рѣшаютъ сложныя и трудныя задачи подборомъ чиселъ, не умѣя объяснить, почему они поступаютъ такъ или иначе и притомъ часто совершенно неправильно употребляя дѣйствія. Такихъ учениковъ убѣдить въ неправильности ихъ рѣшенія очень трудно; они всегда говорятъ: „вѣдь у меня получилось вѣрно", этому только и придаютъ они значеніе.

Въ заключеніе повторяемъ, что исправлять подобныя дурныя привычки учениковъ очень трудно, особенно при классныхъ занятіяхъ (при занятіяхъ съ отдѣльными учениками гораздо легче) предупреждать же развитіе ихъ вовсе не трудно.

Чтобы пріучить учениковъ къ возможно большей самостоятельности рѣшеній, нужно не только упражнять въ рѣшеніи задачъ и въ вычисленіяхъ, но постепенно пріучать и къ повѣркѣ получаемыхъ результатовъ; учащіеся должны пріучаться сами себя провѣрять, а не полагаться на результатъ, данный въ книгѣ:

Наконецъ, чтобы продѣланныя упражненія помогали ученикамъ понимать дальнѣйшее, не слѣдуетъ ограничиваться рѣшеніями задачъ и объясненіями хода рѣшенія: нужно, чтобы послѣ ряда однородныхъ упражненій непремѣнно дѣлалось обобщеніе, т. е. указывался *пріемъ работы* и значеніе послѣдней.

Всякія упражненія въ рѣшеніи и разборѣ задачъ, а также въ вычисленіяхъ сперва должны относиться къ конкретнымъ (при которыхъ стоитъ названіе предметовъ, о которыхъ идетъ рѣчь, на

примѣръ: 5 стульевъ, шесть учениковъ и т. п.) или къ именованнымъ числамъ, а потомъ уже къ отвлеченнымъ, такъ какъ отвлеченность условій или вычисленій всегда болѣе или менѣе затрудняетъ учащихся. Всѣ упражненія должны сперва дѣлаться устно, а въ письменныя могутъ быть обращаемы только тогда, когда устно безъ затрудненія выполняются учениками; кромѣ того, первыя письменныя упражненія каждаго рода должны представлять лишь повтореніе только что разобраннаго во время урока примѣра.

Теперь перехожу къ болѣе подробному изложенію плана работъ каждаго рода и поясню все примѣрами.

Ариѳметическія задачи раздѣляются на двѣ главныя группы: 1) задачи на вычисленія и 2) задачи съ условіями. Перваго рода задачи если и облекаются въ форму задачъ съ условіями, ради большей живости и наглядности изложенія, то во всякомъ случаѣ не должны представлять затрудненій относительно самаго содержанія; проще сказать—изложеніе задачи должно прямо подсказывать, какія дѣйствія и въ какомъ порядкѣ должны быть сдѣланы для рѣшенія задачи. Первыя упражненія въ вычисленіяхъ, какъ уже было сказано въ первой главѣ руководства, лучше облекать въ форму задачъ; тогда легко раскрывается передъ дѣтьми смыслъ дѣйствій, легко улавливаются числовыя отношенія и занятія вычисленіями больше интересуютъ дѣтей.

Упражненія въ вычисленіяхъ относятся сперва къ числамъ перваго десятка или даже къ отдѣльнымъ только числамъ, но охватываютъ непремѣнно всѣ 4 дѣйствія. Когда былъ продѣланъ рядъ примѣровъ, различнымъ образомъ выраженныхъ, но относящихся къ одному и тому же дѣйствію, съ одними и тѣми же числами, то слѣдуетъ сдѣлать указанія на отвлеченныя числа, сказать, что при такомъ-то вычисленіи съ такими-то числами всегда получается такой-то результатъ, къ какимъ-бы предметамъ не относились эти числа. Напримѣръ, когда дѣти на нѣсколькихъ случаяхъ увидятъ, что 7 безъ 3 будетъ 4 (было семь учениковъ въ комнатѣ, трое уже ушли домой, сколько осталось? у мальчика было 7 сливъ, три онъ съѣлъ, сколько осталось? одинъ ученикъ написалъ 7 страницъ, другой 3 меньше, сколько написано вторымъ? въ одной комнатѣ 7 оконъ, въ другой 3, насколько меньше во второй? и

т. п.), слѣдуетъ указать на то, что „семь безъ трехъ *всегда* будетъ четыре", предложить еще 2—3 примѣра, и черезъ нѣсколько времени, на другой урокъ, примѣрно, спросить уже въ отвлеченной формѣ: сколько будетъ семь безъ 3 и т. п. Подобное маленькое обобщеніе лучше всегда относить не къ одному результату, а къ нѣсколькимъ подобнымъ результатамъ, даже къ цѣлому ряду ихъ, если они были разобраны на одномъ и томъ же урокѣ; напримѣръ, не только можно указать, что 7 безъ 3 будетъ 4, а также и то, что 3 да 4 будетъ 7, что 3 взятое два раза будетъ всегда 6, что раздѣлить 6 на двѣ равныя части получимъ 3 и т. д. При этомъ очень полезно сопоставлять результаты дѣйствій надъ взятыми числами съ результатами противуположныхъ дѣйствій, въ которыхъ результатомъ будетъ одно изъ прежнихъ данныхъ; говоря, напримѣръ, что 7 безъ 3 всегда будетъ 4, полезно указать, что, „наоборотъ, 3 да 4 всегда будетъ 7". Заботиться о томъ, чтобы результатъ каждаго дѣйствія надъ каждыми двумя числами являлся результатомъ подобнаго обобщенія (чтобы каждое число было сравнено съ каждымъ предшествующимъ черезъ всѣ четыре дѣйствія, какъ часто говорятъ), по моему мнѣнію, совершенно излишне; ученики должны встрѣтиться съ значительнымъ количествомъ подобныхъ обобщеній, чтобы уловить ихъ значеніе; но если послѣ большого количества подобныхъ упражненій они всетаки не могутъ распространить ихъ на другія числа, то, значитъ, они *не поняли* ни смысла обобщеній, ни пріема вычисленій, а только заучили результаты—знанія ихъ малоцѣнны, недостаточно разъяснены; тогда конечно нужно дать новыя упражненія и повторить объясненія.

Въ случаѣ затрудненія учениковъ въ опредѣленіи результата дѣйствій, слѣдуетъ дать имъ возможность найти его при помощи наглядныхъ пособій.

Необходимо, чтобы дѣти достигли твердаго знанія результатовъ дѣйствій надъ числами перваго десятка. При нарушеніи такого правила учитель, очень можетъ быть, въ первое время никакихъ затрудненій не встрѣтитъ, и ему покажется что и не было надобности заботиться о соблюденіи правила. Но если учитель недостаточно останавливается на предварительныхъ практическихъ вычисленіяхъ, то черезъ два-три мѣсяца, когда накопится значи-

тельное количество разнообразныхъ упражненій, ученики станутъ путать ихъ, и тогда уже для поправленія дѣла придется употребить гораздо больше усилій и труда, чѣмъ въ томъ случаѣ, если съ самаго начала были бы тщательно провѣрены силы учениковъ. Что ученики достаточно овладѣли пройденнымъ, всего лучше выражается въ свободѣ, съ которою они дѣлаютъ предлагаемыя упражненія.

Когда учащіеся привыкнутъ нѣсколько къ отвлеченнымъ вычисленіямъ, полезно предлагать имъ ряды устныхъ и письменныхъ упражненій въ вычисленіяхъ съ отвлеченными числами, сперва на одно только дѣйствіе, а потомъ на нѣсколько, слѣдовательно употребляя и скобки. Нечего опасаться, что дѣти будутъ тяготиться подобными упражненіями: дѣти всегда любятъ считать, потому что счетъ для нихъ представляетъ еще затрудненія, но соотвѣтствуетъ ихъ силамъ, а потому и интересуетъ; конечно, не слѣдуетъ давать такихъ упражненій ежедневно: тогда они надоѣдаютъ дѣтямъ, какъ и всякая черезчуръ часто повторяющаяся работа. Употребленіе скобокъ много способствуетъ усиленію интереса (причины тѣ же) и полезности упражненій. Особенно удобно пользоваться такими видами упражненій въ тѣхъ школахъ, въ которыхъ есть нѣсколько отдѣленій въ классѣ; а такихъ школъ—громадное большинство. Рѣшаются формулы со скобками, а также и на отдѣльныя дѣйствія, письменно *). Устныя упражненія въ счетѣ должны идти въ одно время съ письменными, но цѣль ихъ составляетъ не столько развитіе навыка къ сложнымъ вычисленіямъ, сколько пріученіе къ быстрому счету. При упражненіяхъ въ быстромъ устномъ счетѣ слѣдуетъ пріучать дѣтей давать отвѣтъ тотчасъ же, какъ только скажетъ учитель условія; если же дѣти не могутъ сдѣлать это, то значитъ данный примѣръ для нихъ еще сложенъ и надо его упростить. Съ возрастаніемъ чиселъ, входящихъ въ вычисленія, разумѣется, должны и самыя вычисленія усложняться, но стремиться къ очень сложнымъ вычисленіямъ не слѣдуетъ: они отнимаютъ много времени, а пользы отъ нихъ мало; между тѣмъ

*) Замѣтимъ еще, что постановка дѣлителя впереди дѣлимаго, какъ это дѣлается у г. Паульсона и нѣкоторыхъ другихъ, мы считаемъ неудобною: дѣтямъ впослѣдствіи приходится переучиваться, и это ихъ сбиваетъ.

нѣкоторые учителя увлекаются сложными упражненіями въ вычисленіяхъ. Упражненія въ отвлеченныхъ вычисленіяхъ, конечно, содѣйствуютъ развитію отвлеченнаго понятія о числѣ и способности къ отвлеченію, но еще не значитъ, что они будутъ полезны, въ какой бы мѣрѣ ни предлагались. По моему мнѣнію, для пониманія предмета важно, чтобы дѣти могли считать быстро, но чтобы они могли дѣлать очень сложныя вычисленія—не важно. Упражненія въ вычисленіи во всякомъ случаѣ полезно предлагать во *все* продолженіе элементарнаго курса; но чѣмъ лучше считаютъ ученики, тѣмъ рѣже можно предлагать подобныя упражненія *).

Задачи съ условіями играютъ еще болѣе важную роль въ курсѣ, а потому уже и хорошо вести соотвѣтствующія упражненія труднѣе. Задачи съ условіями не только не играютъ служебную, какъ говорятъ, роль, т. е. помогаютъ усвоенію предмета, объясненію теоріи, но имѣютъ, или, лучше сказать, могутъ имѣть и самостоятельное значеніе, а именно, могутъ способствовать развитію соображенія и навыка примѣнять усвоенныя знанія къ рѣшенію вопросовъ.

По мѣрѣ движенія курса всѣ учителя усложняютъ задачи, но усложненія эти имѣютъ двоякаго рода характеръ. Нѣкоторые находятъ наиболѣе полезнымъ усложнять содержаніе предлагаемыхъ задачъ прибавленіемъ хотя и новыхъ условій, но значеніе которыхъ почти очевидно, такъ что прибавленіе ихъ увеличиваетъ трудъ, необходимый для рѣшенія задачи, но не требуетъ большей догадливости; такія задачи если и затрудняютъ учениковъ, то затрудняютъ своей длиной; ученикъ ошибется въ какомъ-нибудь вычисленіи и долго возится съ нимъ, или забудетъ какое-нибудь изъ многочисленныхъ условій и потому неправильно рѣшитъ задачу. Другіе преподаватели считаютъ всего болѣе важнымъ постепенное усиленіе требованій относительно соображенія условій, иначе—разбора задачъ, трудныхъ по содержанію, а не по количеству данныхъ или сложности вычисленія; но нѣкоторые изъ такихъ учителей особенно цѣнятъ отвлеченность условій (которая всегда значительно затрудняетъ учащихся) и не особенно заботятся объ

*) Подобные ряды вычисленій хороши въ „Методикѣ ариѳметики" Гольденберга.

увеличенія требованія догадливости со стороны учениковъ, т. е. о развитіи умѣнья соображать условія вопроса. Переходъ къ отвлеченнымъ даннымъ, конечно, нуженъ и полезенъ для учащихся, заставляетъ ихъ думать и обобщать, значитъ дѣйствуетъ на нихъ развивающимъ образомъ; но полезно пріучать и къ разбору и рѣшенію вопросовъ. Математика, вообще говоря, даетъ такой общій пріемъ рѣшенія вопросовъ, который одинаково примѣнимъ къ вопросамъ всякаго рода, по всѣмъ страслямъ знаній; но чтобы примѣнить его, надо выразить данныя въ числахъ и раскрыть зависимость между ними. Это раскрытіе зависимости между данными и составляетъ главнѣйшую трудность въ рѣшеніи вопросовъ; выучиться находить ее можно только практикой; а умѣнье находить ее и выражать математически—есть умѣнье примѣнять математическія знанія къ рѣшенію вопросовъ.

Ариѳметика, не смотря на небольшой ея объемъ и ограниченность ея средствъ для рѣшенія вопросовъ, все-таки должна носить въ учебномъ курсѣ тотъ же характеръ, какъ и вся математика *), должна быть ея представительницей. И только при такой широкой постановкѣ предмета можетъ онъ оказать все то вліяніе на развитіе учащихся, къ какому способенъ. Мы думаемъ, что даже въ тѣхъ школахъ, какъ, напримѣръ, теперешнихъ нашихъ сельскихъ школахъ, гдѣ по недостатку времени не можетъ быть пройденъ полный элементарный курсъ ариѳметики, характеръ постановки предмета долженъ быть сохраненъ тотъ же: чѣмъ полнѣе будетъ выяснена пройденная часть предмета и чѣмъ глубже будетъ раскрыто его значеніе, тѣмъ полезнѣе будетъ его вліяніе; а въ ариѳметикѣ даже (см. первую гл.), вполнѣ удобно разомъ охватить содержаніе всего предмета, хотя въ простѣйшихъ примѣненіяхъ. Сопоставленіе условій задачи и открытіе зависимости между данными развиваетъ соображеніе учащихся а необходимость послѣдовательнаго расположенія дѣйствій развиваетъ привычку обдумывать работу.

*) Въ научномъ отношеніи она можетъ быть разсматриваема иначе, именно какъ техническая часть предмета, но такого значенія въ учебномъ курсѣ она имѣть не можетъ.

Изъ сказаннаго, я думаю, уже достаточно ясно, въ какую сторону склоняется мое мнѣніе относительно значенія трудныхъ задачъ въ курсѣ ариѳметики *).

Придавая задачамъ, труднымъ по содержанію или по отвлеченности данныхъ, полезное значеніе въ курсѣ, необходимо остановиться на опредѣленіи того, какимъ образомъ можно довести учащихся до умѣнья рѣшать болѣе трудныя задачи. Многіе учителя (а особенно начинающіе, которые всегда преувеличиваютъ силы учениковъ и потому невольно и незамѣтно для себя впадаютъ въ подобную ошибку, просто потому только, что предложивши задачу, трудную для учащихся, не знаютъ какъ выпутаться) надѣются выучить учащихся рѣшать задачи, рѣшая съ ними вмѣстѣ трудныя задачи и разъясняя ихъ. Другіе считаютъ нужнымъ очень медленно увеличивать трудность рѣшенія задачъ, такъ чтобы ученикамъ не приходилось затрудняться рѣшеніемъ задачъ, развѣ только случайно. Третьи считаютъ нужнымъ давать трудныя задачи безъ продолжительной предварительной подготовки, а когда встрѣтятся затрудненія—помочь ученикамъ предложеніемъ подобной же задачи, но съ меньшими числами и упрощенной по содержанію (подобный пріемъ особенно рекомендуется гр. Толстымъ въ его „Азбукѣ“). *Пріемамъ* объясненія задачъ, когда они затрудняютъ учащихся, большинствомъ преподавателей придается такое важное значеніе, что указаніе на нихъ дѣлается въ большей части руководствъ къ преподаванію ариѳметики, а въ наиболѣе полномъ изъ нихъ, „Методикѣ ариѳметики“ г. Евтушевскаго, даются довольно подробныя указанія. Всѣ указанные пріемы, по нашему мнѣнію, имѣютъ свое полезное значеніе, но не однимъ изъ нихъ въ отдѣльности ограничиться нельзя.

Примѣненіе же тѣхъ или другихъ пріемовъ объясненія трудныхъ задачъ къ частнымъ примѣрамъ мы считаемъ или неудачнымъ, или вестаки мало разъясненнымъ въ существующихъ руководствахъ.

*) Остановиться на значеніи задачъ я счелъ особенно нужнымъ въ виду того, что въ лучшихъ и наиболѣе распространенныхъ нашихъ руководствахъ къ преподаванію ариѳметики въ началѣ курса предлагаются хотя довольно трудныя, но вообще хорошія для начала курса задачи, а потомъ сложность ихъ увеличивается въ зависимости только отъ увеличенія количества данныхъ и усложненія вычисленій, но не условій.

Вообще говоря, задачи не должны затруднять учениковъ, должны быть по силамъ большинству, хотя могутъ заставить подумать о рѣшеніи; однакоже, по моему мнѣнію, важно, чтобы ученики время отъ времени встрѣчали трудныя для нихъ задачи, которыя заставили бы ихъ усиленно трудиться; не бѣда, если и не будутъ иныя рѣшены безъ помощи учителя. Если задачи будутъ всегда доступны ученикамъ, то послѣдніе могутъ выучиться рѣшать задачи, но не выучатся сосредоточивать свои силы въ случаѣ надобности; а при всякой самостоятельной работѣ такіе случаи неизбѣжно должны встрѣчаться. Кромѣ того, встрѣчая затрудненія, учащіеся больше интересуются работой, имъ хочется побѣдить встрѣченное препятствіе; они спрашиваютъ о томъ, какія есть еще трудныя задачи, просятъ задать ихъ и т. п., доказывая этимъ пробужденіе въ нихъ интереса къ задачамъ. Если же задачи всегда доступны, то работа кажется дѣтямъ однообразной: нѣтъ въ ней выдающихся мѣстъ. Но если бы постоянно предлагались трудныя задачи, и ученики безуспѣшно или съ очень малымъ успѣхомъ пытались рѣшать ихъ, то безуспѣшность работы тяжело ложится на учащихся, даже можетъ подавить въ нихъ всякую энергію, они могутъ потерять вѣру въ свои силы, тогда какъ по временамъ встрѣчающіяся затрудненія, даже побѣждаемыя лишь съ помощью учителя, дѣйствуютъ совершенно обратно, возбуждаютъ энергію и поднимаютъ духъ учащихся. Наконецъ, я думаю, что постоянная доступность задачъ не только не даетъ возможности дѣтямъ выучиться сосредоточивать свои силы, но даже можетъ способствовать развитію въ нихъ пренебрежительнаго отношенія къ дѣлу, изъ-за предположенія, что все для нихъ доступно (такъ какъ затрудненій они не встрѣчаютъ), а черезъ это —дать пищу ихъ самомнѣнію. При всякомъ же затрудненіи такіе ученики теряются совершенно, не умѣютъ приняться за дѣло, сразу теряютъ всякую вѣру въ свои силы, отказываются даже отъ попытки рѣшить задачу, или утверждаютъ, что ее совсѣмъ рѣшить нельзя, и не хотятъ надъ ней думать. Отчего? Имъ непріятенъ переходъ отъ постоянно какъ бы торжествующаго положенія къ сознанію своего безсилія, и они стараются приписать причину своей неудачи задачѣ, а не самимъ себѣ и, чтобы не открыть своего безсилія, безсознательно отыскиваютъ единственное къ тому средство—отказъ отъ работы.

Мы уже говорили, какъ важно обдумывать всегда нравственное вліяніе употребляемыхъ пріемовъ преподаванія даже и такого предмета, какъ ариѳметика, говорили, что чисто методическіе вопросы невозможно вполнѣ отдѣлить отъ вопросовъ воспитанія.

Предложеніе задачъ подобныхъ той, которая затруднила учениковъ, можетъ быть съ пользою употребляемо какъ пріемъ наведенія; но такой ходъ работы не можетъ считаться желательнымъ какъ постоянный пріемъ: въ этомъ случаѣ на учениковъ дѣйствуетъ сравненіе, но оно не пріучаетъ ихъ разбирать вопросъ и искать основы въ общемъ запасѣ знаній.

Непосредственное разъясненіе задачи, затруднившей учениковъ, совершенно уже неудовлетворительно: оно не оставляетъ мѣста самостоятельной работѣ учащихся, потому что вся работа выполняется тогда учителемъ, а потому такое разъясненіе очень мало вліяетъ на развитіе учащихся, хотя даетъ возможность сравнительно въ короткое время пріобрѣсти навыкъ въ рѣшеніи задачъ. (Поэтому то такой пріемъ приходится употреблять въ тѣхъ случаяхъ, когда нужно въ короткое время подготовить къ экзамену).

Стараясь навести ученика на рѣшеніе задачи наводящими вопросами, преподающіе нерѣдко сбиваются при этомъ на то, что вполнѣ подсказываютъ ученикамъ рѣшеніе, оставляя на долю дѣтей только выполненіе вычисленій; вопросы, предлагаемые при разборѣ задачъ въ подобныхъ случаяхъ, всегда хорошо характеризуютъ недостатки пріема; въ нихъ только и слышится: „сколько получится“ (при такихъ-то и такихъ-то условіяхъ *). Нерѣдко случается, что послѣ подобнаго разбора ученики не могутъ повторить хода рѣшенія задачи: такъ мало они успѣваютъ въ него вникнуть, хотя и отвѣчали на предлагавшіеся имъ вопросы.

Чтобы достигнуть пониманія рѣшенія задачи учениками и возможно большаго участія со стороны ихъ въ самомъ разборѣ условій и хода рѣшенія предложенной задачи, по нашему мнѣнію необходимо, чтобы по поводу прочтенной задачи учителемъ велась

---

*) Замѣтимъ мимоходомъ, что опредѣлить пріемъ наведенія необходимо и потому, что, какъ бы тщательно не подбирали мы задачи, всегда можетъ встрѣтиться случайное затрудненіе, которое нужно побѣдить.

„объяснительная бесѣда", чтобы задача разсматривалась какъ *статья*, содержаніе которой нужно объяснить дѣтямъ, обративъ ихъ вниманіе на наиболѣе существенную часть статьи, причемъ первые вопросы могутъ и не относиться къ тѣмъ частямъ, съ которыхъ слѣдуетъ начать вычисленіе рѣшенія. Внѣшнимъ образомъ особенность пріема выразится въ постановкѣ вопроса „почему" такъ или иначе думаютъ поступать ученики, слушающіе разборъ задачи; вопросъ этотъ ставится прежде перехода къ вычисленію.

Пояснимъ примѣромъ. Положимъ дана задача, которую ученики затруднились рѣшить: разнощикъ одному покупателю продалъ 15 яблоковъ и 10 апельсинъ и получилъ съ него 1 р. 20 к., а другому продалъ 15 яблоковъ и 15 апельсинъ и получилъ съ него 1 р. 50 к.; почемъ онъ продавалъ 10 яблоковъ и 10 апельсинъ? Учитель начинаетъ разборъ задачи вопросомъ: о чемъ говорится въ задачѣ? (Если ученики тверды въ усвоеніи содержанія прочитанной разъ задачи, то подобные вопросы можно, и даже лучше, пропускать). Дальнѣйшіе вопросы должны относиться къ труднѣйшей части задачи. Учитель спрашиваетъ, напримѣръ: отчего же разнощикъ со втораго покупателя получилъ больше чѣмъ съ перваго? Когда ученики объяснятъ—слѣдуетъ спросить, насколько же именно больше получилъ разнощикъ со втораго покупателя (этимъ обращается вниманіе учащихся на необходимость всегда переходить къ вычисленію, когда зависимость между данными раскрыта). Дальнѣйшіе вопросы: какъ же узнать цѣну 1 апельсина? отчего же перый покупатель заплатилъ 1 р. 20 к., а не 60 к. (остальное уплочено за яблоки)? сколько же было заплачено за яблоки и что заплочено за 1 яблоко?

Другой примѣръ. Дана задача, которая тоже всегда затрудняетъ учащихся въ первые годы занятій: работникъ нанятъ съ платою по 1 р. 50 к. въ день, но съ тѣмъ условіемъ, что въ тотъ день, когда онъ не будетъ работать, онъ самъ будетъ платить по 30 коп. за ѣду; черезъ 45 дней онъ окончилъ работу и получилъ всего 54 р. 90 к.; спрашивается, сколько дней онъ работалъ и сколько не работалъ? Приступая къ разбору задачи, учитель долженъ прежде всего обратить вниманіе учениковъ на полученіе неполной платы за 45 дней и причины ея уменьшенія,

такъ какъ въ этомъ ключъ къ рѣшенію задачи. Все ли получилъ работникъ, что ему слѣдовало? Почему же не все? Насколько меньше изъ-за этого (не работалъ нѣкоторые дни) получилъ онъ? А когда онъ не работалъ, насколько уменьшалась плата? Ученики обыкновенно думаютъ, что потерю составляетъ только поденная плата, забывая о приплатѣ, которую долженъ дать работникъ за пищу, поэтому придется спросить: развѣ условіе было безплатно кормить работника, когда онъ не работаетъ? Насколько же меньше долженъ получить онъ, если не работалъ одинъ день? (Полезно предлижить здѣсь еще одинъ повторительный вопросъ, чтобы провѣрить, насколько ученики поняли объясненіе: почему же плата уменьшится на 1 р. 80 к., а не на 1 р. 50 к.?) Теперь скажите, сколько дней работникъ не работалъ? Приведемъ еще примѣрный разборъ задачи третьяго рода. Задача. Отцу и сыну вмѣстѣ 54 года, отцу и дѣду вмѣстѣ 104 года, а дѣду и внуку—78 лѣтъ. Сколько лѣтъ каждому? Объяснительная бесѣда. О чемъ говорится въ задачѣ? Отчего выходитъ, что отцу и дѣду вмѣстѣ больше лѣтъ, чѣмъ внуку и дѣду? Насколько же, значитъ, отецъ старше сына? Что же еще сказано въ задачѣ объ ихъ годахъ? Какъ же узнать ихъ года, если вмѣстѣ имъ 54 года, а отецъ старше сына на 26 лѣтъ?

Дополнительные вопросы, если подобныхъ задачъ еще не рѣшали: можно ли число 54 раздѣлить на два, чтобы узнать число лѣтъ каждаго? Отчего же нельзя? (Дѣлить мы умѣемъ только на равныя части, а здѣсь части не равны). Какъ же сдѣлать части (число лѣтъ) равными? Послѣ рѣшенія слѣдуетъ непремѣнно повторить весь ходъ его и записать; если же дѣти очень затруднялись задачей, то записывать ходъ рѣшенія слѣдуетъ во время самаго рѣшенія, потому что смотря на запись рѣшенія ученики легче могутъ припомнить его ходъ.

Я привелъ примѣры разбора задачъ, которыя должны затруднить учениковъ, еще не привыкшихъ къ подобнымъ задачамъ, и такимъ образомъ отступилъ отъ плана изложенія, чтобы пояснить, что я подразумѣваю подъ „объяснительной бесѣдой" по поводу трудной задачи. Приведенные примѣры разборовъ, я надѣюсь, достаточно ясно показываютъ, что разборъ содержанія всегда связывается съ припоминаніемъ содержанія задачи по частямъ, по-

этому, если даже ученики, не понимая задачи, не могутъ припомнить ея содержаніе (а непониманіе задачи всегда вліяетъ на запоминаніе условій), то это не лишаетъ возможности приняться за рѣшеніе задачи.

Въ случаяхъ затруднительныхъ наведеніе можетъ быть начато съ предложенія такихъ вычисленій, которыя противуположны необходимымъ въ дѣйствительности. Напримѣръ, чтобы выяснить необходимость отнять разность чиселъ отъ ихъ суммы, для нахожденія каждаго изъ нихъ въ отдѣльности (зная сумму лѣтъ отца и сына, надо отнять отъ нея разность числа ихъ лѣтъ, показывающую, насколько отецъ старше сына, и остатокъ раздѣлить пополамъ; тогда будутъ найдены лѣта сына *), начинаютъ наведеніе вопросомъ: можно ли раздѣлить общее число ихъ лѣтъ пополамъ, чтобы узнать лѣта отца и т. п. Разумѣется, такое наведеніе нѣсколько искусственно, но избѣжать искусственности во все продолженіе курса очень трудно. Избѣжать ея можно только крайне тщательнымъ подборомъ упражненій, умѣньемъ предусмотрѣть все, что понадобится впослѣдствіи, и умѣньемъ всегда воспользоваться представляющимся удобнымъ случаемъ для разъясненія какого-нибудь понятія. Все это слишкомъ сложныя условія, чтобы кто-нибудь могъ разсчитывать на полное ихъ соблюденіе, а потому и обойтись безъ искусственныхъ пріемовъ, по нашему мнѣнію, практически невозможно. Въ упомянутомъ случаѣ, напримѣръ, можно было бы обойтись безъ искусственнаго пріема, если бы дѣтямъ раньше было извѣстно, какъ по суммѣ и разности найти слагаемыя суммы; а указать на это возможно при рѣшеніи цѣлаго ряда подготовительныхъ задачъ, или при случаѣ, когда дѣти сами нападутъ на такой примѣръ, въ которомъ одно число прибавляется къ другому, чтобы сдѣлать ихъ равными, и сказать: вотъ теперь они равны и каждое составляетъ половину обоихъ вмѣстѣ взятыхъ (суммы); впослѣдствіи этимъ указаніемъ и можно будетъ воспользоваться. Въ случаѣ затрудненія учащихся во время новыхъ упражненій всегда слѣдуетъ пояснять дѣло *примѣрами, фактами*, а не словами, впослѣдствіи же—ссылками на предыду-

---

*) Конечно, къ суммѣ можно прибавить разность лѣтъ отца и сына и полученное число раздѣлить пополамъ: тогда получится сперва число лѣтъ отца.

щее. Начинающіе учителя обыкновенно поступаютъ наоборотъ: стремятся все объяснить на словахъ и потому иногда еще болѣе запутываютъ учащихся. Для достиженія такой возможности пользоваться предшествующими упражненіями въ будущемъ и нужно, какъ было сказано выше, не только рѣшать примѣры и задачи, но постоянно стремиться къ обобщенію и отвлеченію, къ указанію общихъ пріемовъ рѣшенія однородныхъ вопросовъ; это очень полезно. Первымъ толчкомъ къ обобщенію можетъ быть и наглядное упражненіе; напримѣръ, для подготовленія объясненія разобраннаго выше случая, можно было бы дать 8—15 предметовъ, предложивъ разложить ихъ такъ, чтобы въ одной кучкѣ было 4—7 больше, чѣмъ въ другой; дѣти сдѣлаютъ подобное разложеніе на предметахъ; тогда ихъ можно спросить, какъ сдѣлать равными эти кучки (можно отнять весь излишекъ, или придать его, или отнять половину излишка отъ бо̀льшей кучки и придать ея къ меньшей), сколько ихъ тогда будетъ, какое число получится, если число вмѣстѣ съ прибавкой раздѣлить пополамъ и т. д. Подобныя простыя и прямыя упражненія въ счетѣ могутъ впослѣдствіи служить хорошимъ матеріаломъ для рѣшенія взятаго нами примѣра. Чтобы довести дѣтей до пониманія отвлеченныхъ отношеній чиселъ и значенія дѣйствій, очень полезно требовать отъ учениковъ (разумѣется, когда опредѣленія дѣйствій уже выработаны и составлены) при рѣшеніи простыхъ задачъ объясненія, почему они употребляли то, а не другое дѣйствіе. Если, напримѣръ, ученикъ говоритъ: каждому мальчику дали по 5 пряниковъ, а ихъ было 8, то, чтобы узнать, сколько получили всѣ, надо 5 умножить на 8. Учитель требуетъ объясненія, почему для рѣшенія задачи надо умножить 5 на 8, а не вычесть, или сдѣлать какое-нибудь другое дѣйствіе. Дѣти, въ первое время, затрудняются этимъ вопросомъ, не понимаютъ, что собственно спрашиваетъ учитель и обыкновенно просто повторяютъ сказанное. Учитель можетъ пояснить вопросъ, говоря: ты сказалъ, что надо „умножить“ одно число на другое; это—ариѳметическое названіе вычисленія; а теперь скажи, какъ объяснить своими словами, что дѣлается съ числами, не говоря ариѳметическаго названія дѣйствія. Въ случаѣ надобности, можно еще напомнить о значеніи дѣйствія, спросивъ: какое дѣйствіе называется умноженіемъ? а

что теперь дѣлали мы съ числомъ? (Повторяли 5 столько разъ, сколько мальчиковъ). Почему надо назвать сдѣланное дѣйствіе умноженіемъ? (При умноженіи число повторяется). Почему же въ этомъ случаѣ надо сдѣлать умноженіе, а не другое дѣйствіе? *) Подобнымъ же образомъ поступаютъ и при встрѣчѣ съ другими дѣйствіями. Можно поставить вопросъ и въ иной формѣ: нельзяли вмѣсто умноженія раздѣлить одно число на другое? Почему нельзя? Что дѣлали съ числомъ? Какъ называется такое вычисленіе?

Предлагаемый нами пріемъ работы съ трудными задачами во всякомъ случаѣ долженъ относиться къ небольшому меньшинству задачъ. Въ нормальномъ же случаѣ, подъ который должно подходить большинство упражненій, предлагаемая задача должна быть настолько доступна ученикамъ, чтобы, подумавши, большинство учениковъ могло ее рѣшить безъ посторонней помощи. Умѣнье же рѣшать задачи можетъ быть достигнуто многочисленными упражненіями въ рѣшеніи такихъ, постепенно усложняющихся задачъ.

Въ настоящее время, однако же, учителю довольно трудно подобрать рядъ такихъ задачъ, которыя бы постепенно подготовляли учащихся къ рѣшенію слѣдующихъ, болѣе трудныхъ, такъ какъ въ существующихъ сборникахъ ариѳметическихъ задачъ нельзя найти готоваго подбора; въ сборникахъ можно найти хорошій подборъ задачъ, ризвивающихъ навыкъ къ вычисленію (сборники Евтушевскаго, Томаса), но трудныхъ задачъ въ сборникахъ или почти совсѣмъ нѣтъ, какъ въ названныхъ выше сборникахъ, или же онѣ набраны совершенно случайно, даже перемѣшаны съ самыми легкими задачами (сборн. Малинина и Буренина), и, въ лучшемъ случаѣ, въ сборникѣ данъ рядъ хорошихъ задачъ, но не помѣщено такихъ задачъ, рѣшеніе которыхъ могло бы подготовить учениковъ къ самостоятельному рѣшенію первыхъ, трудныхъ задачъ (сборн. Воленса). Каждому учителю приходится самому заботиться о подборѣ задачъ; чтобы хотя сколько нибудь удовлетворительно вы-

---

*) Въ данномъ примѣрѣ не слѣдуетъ говорить, что надо умножить 8 на 5 (т. е. переставлять большаго множителя впередъ), такъ какъ повторяется здѣсь не 8, а 5; величина результата, конечно, не измѣняется, но для объясненія не безразлично, которое число принимается за множителя.

полнить это, нужно потратить много труда и времени, нужно и умѣнье *).

Мы постараемся показать, какъ можно облегчить себѣ работу, а вмѣстѣ съ тѣмъ и то, какъ вести подобныя занятія съ учениками.

Поясняя примѣрами, какъ вести разборъ задачи, сильно затруднившей учениковъ, мнѣ пришлось уже показать, что затрудненіе въ большинствѣ случаевъ зависитъ не отъ всей совокупности условій, а только отъ нѣкоторыхъ изъ нихъ, и каждая трудная задача распадается на нѣсколько отдѣльныхъ, болѣе или менѣе трудныхъ задачъ, но, конечно, всегда болѣе легкихъ чѣмъ данная, уже потому, что въ нихъ будетъ меньше условій. Если же всякая трудная задача можетъ быть разбита на рядъ болѣе простыхъ, то, понятно, предварительное рѣшеніе этихъ болѣе простыхъ задачъ, какъ задачъ самостоятельныхъ, подготовитъ къ рѣшенію болѣе трудной, особенно, если при рѣшеніи первыхъ, какъ было сказано, учитель не ограничится полученіемъ рѣшенія, но, послѣ рѣшенія нѣсколькихъ сходныхъ задачъ, укажетъ на пріемъ рѣшенія ихъ. Кромѣ того, распаденіе сложной или трудной задачи на рядъ простѣйшихъ объясняетъ и то, какимъ образомъ могутъ быть найдены учителемъ тѣ задачи, которыя могутъ подготовить учениковъ къ рѣшенію болѣе трудныхъ. Если учитель опредѣлитъ себѣ рядъ такихъ трудныхъ задачъ, до умѣнья рѣшать которыя онъ хочетъ довести своихъ учениковъ, и путемъ разбора ихъ найдетъ тѣ простыя задачи, которыя входятъ въ составъ взятыхъ сложныхъ, то онъ найдетъ рядъ тѣхъ, которыя постепенно должны быть введены въ курсъ, по порядку ихъ трудности. Какія задачи затрудняютъ учениковъ, учитель можетъ опредѣлить практически.

Опять пояснимъ свою мысль примѣромъ. Положимъ, что учитель находитъ интересной и полезной задачу, помѣщенную на 101 стр. и хочетъ подготовить своихъ учениковъ къ рѣшенію подобныхъ задачъ. Разбирая содержаніе задачи и разлагая ея на

*) Учитель сельской школы въ Таврической губ. П. В. Татариновъ составилъ сборникъ примѣнительно къ воззрѣніямъ, высказаннымъ въ настоящей книгѣ (по собственному почину). Его адресъ: Ст. Кринички, учителю Татаринову. Цѣна сборника 30 к.

рядъ простыхъ *), учитель, конечно, придетъ къ заключенію, что въ числѣ простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ сложной (какъ бываетъ почти всегда), трудныхъ собственно нѣтъ, ученикамъ трудно только бываетъ догадаться, что, для опредѣленія цѣны апельсина и яблока надо знать, насколько второй покупатель уплатилъ больше перваго, т. е. учащіеся не умѣютъ сопоставлять условія. Но, разумѣется, учитель долженъ позаботиться, чтобы учащіеся дѣйствительно могли рѣшить каждую изъ перечисленныхъ простыхъ задачъ, т. е. долженъ позаботиться, чтобы ученики во время занятій встрѣтились съ подобными простыми задачами, съ каждой въ отдѣльности. Такъ какъ каждая изъ этихъ задачъ сама по себѣ не трудна, то рѣшеніе ея, если она будетъ предложена въ простомъ видѣ, т. е. безъ прибавленія какихъ либо условій и не въ отвлеченномъ видѣ, а съ конкретными числами, не затруднитъ учащихся. Учителю слѣдуетъ только, какъ говорилось выше, послѣ рѣшенія подобной задачи (или нѣсколькихъ одинаковыхъ) сдѣлать *обобщеніе* **), т. е. высказать въ отвлеченной формѣ, что слѣдуетъ дѣлать при рѣшеніи подобной задачи ***). Чтобы пріучить къ сопоставленію нѣ-

---

*) Послѣдовательность простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ разсматриваемой сложной, выражается слѣдующими строками:

1) со второго покупателя получено больше на 1 р. 50 к.—1 р. 20 к.=30 к.;
2) второму покупателю лишнихъ продано 15 ап.—10 ап.=5 ап.
3) за апельсинъ платили 30 к. : 5=6 к.;
4) первый покупатель заплатилъ за 10 ап. 6 к.×10=60 к.;
5) 15 яблокъ стоятъ 1 р. 20 к.—60 к.=60 к.;
6) одно яблоко стоитъ 60 к. : 15=4 к.;
7) 10 яблокъ стоятъ 4 к.×10=40 к.

**) Это дѣлается въ началѣ занятій, о чемъ, можетъ быть, не лишнимъ будетъ здѣсь напомнить, а также и о томъ, что подготовленіе къ рѣшенію трудной задачи, въ обыкновенныхъ случаяхъ, не должно непосредственно предшествовать ея рѣшенію, а составляетъ содержаніе вообще всѣхъ упражненій въ рѣшеніи задачъ во время курса,—поэтому ученики подготовляются не къ рѣшенію одной только какой-нибудь задачи, а всѣхъ вообще, рѣшая систематически подобранныя задачи, такъ подобранныя, чтобы въ число рѣшаемыхъ задачъ вошли всѣ, нужныя для рѣшенія намѣченныхъ трудныхъ.

***) Рѣшеніе простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ взятаго примѣра, должно привести къ заключеніямъ (обобщеніямъ): чтобы, по цѣнѣ нѣсколькихъ одинаковыхъ предметовъ и числу ихъ, узнать цѣну одного, надо цѣну всѣхъ раздѣлить на то, что стоитъ одинъ (третья задача) и т. д.

скольких задачъ, когда каждая изъ нихъ уже можетъ быть рѣшена, нужно предлагать сперва такія сложныя, которыя легко разбиваются на простыя. Въ разсматриваемомъ примѣрѣ первыя сопоставленія, на которыя слѣдуетъ обратить вниманіе, т. е. легчайшія—слѣдующія: зная цѣну нѣсколькихъ одинаковыхъ предметовъ, какъ узнать цѣну другаго числа ихъ (подобное заключеніе вытекаетъ изъ рѣшенія задачъ съ конкретными числами, напримѣръ: за 5 апельсинъ заплачено 30 коп., сколько слѣдуетъ заплатить за 10 или какое либо другое число апельсинъ и т. п.), потомъ—какъ по общей цѣнѣ предметовъ двухъ родовъ узнать цѣну одного предмета каждаго сорта, если цѣна предметовъ одного рода извѣстна *) (заключеніе изъ ряда задачъ подобныхъ задачѣ: за 15 яблоковъ и 10 апельсинъ вмѣстѣ заплачено 1 р. 20 к., а апельсины стоятъ 60 к., сколько стоитъ одно яблоко?). Кромѣ того, при разборѣ задачъ на опредѣленіе цѣны предметовъ слѣдуетъ почаще указывать, что по цѣнѣ нѣсколькихъ предметовъ можно узнать цѣну одного только изъ нихъ, только тогда, если предметы одинаковы. (Переходя къ рѣшенію задачъ нѣсколько затрудняющихъ учениковъ по своей сложности, нерѣдко приходится наблюдать, что дѣти забываютъ объ этомъ, какъ только задача немного ихъ затрудняетъ, а рѣшить ее хочется).

Чтобы подойти къ наиболѣе трудному мѣсту рѣшенія нашей сложной задачи (онъ указанъ при разборѣ рѣшенія на стр. 101), нужно предложить учащимся такія задачи, въ которыхъ также сопоставлялись бы двѣ покупки, а всѣ остальныя условія упростить. Можно, напримѣръ, предложить учащимся рѣшить такую задачу: за телѣгу и тройку лошадей просятъ 155 р., а за ту же телѣгу и одну лошадь меньше на 90 руб.; сколько стоитъ одна лошадь?

---

*) Въ настоящемъ случаѣ отвлеченное выраженіе условій задачи довольно сложно; ученики подобныя сложныя выраженія понимаютъ вполнѣ отчетливо, если постепенно пріучаются къ нимъ, но высказывать ихъ сами не могутъ. требовать, чтобы они могли сами высказать и нѣтъ надобности; когда это заключеніе надо примѣнить къ новому случаю, учитель самъ спрашиваетъ, какъ поступаютъ въ тѣхъ случаяхъ, когда извѣстна цѣна предметовъ 2 сортовъ и т. д. Если же дѣти будутъ затрудняться, то въ трудныхъ случаяхъ можно и не указывать въ отвлеченныхъ выраженіяхъ на ходъ задачи, но непремѣнно указывая его въ болѣе легкихъ случаяхъ.

Эта задача легче потому, что въ ней прямо указано: „ту же телѣгу“ *) и прямо указано на уменьшеніе цѣны, чѣмъ и обращается вниманіе на это число; кромѣ того и числа въ этой задачѣ малы. Послѣ рѣшенія подобной задачи слѣдуетъ обратить вниманіе учениковъ на то, что уменьшеніе платы показываетъ цѣну лошадей только потому, что цѣна телѣги не измѣняется, а если бы плата уменьшилась не только оттого, что предлагается меньше лошадей, но и телѣга была бы другая, похуже, то и цѣну лошадей нельзя было бы узнать. Не мѣшаетъ также заставить опредѣлить цѣну телѣги.

Встрѣтившись во время занятій постепенно со всѣми предложенными подготовительными задачами и рѣшивъ не по одной, а по нѣсколько задачъ каждаго рода, мы думаемъ, учащіеся уже не затруднятся рѣшить взятую сложную задачу, можетъ быть немного подумавъ. Такимъ образомъ, упражненія каждаго періода, постепенно развивая учащихся и сообщая имъ нужные навыки, незамѣтно подготовляютъ переходъ къ слѣдующимъ, болѣе труднымъ и сложнымъ упражненіямъ.

Замѣтимъ еще, что при рѣшеніи подобныхъ простыхъ задачъ, для рѣшенія которыхъ надо произвести одно или два дѣйствія, если ученики и затрудняются, то затрудненія ихъ, понятно, происходятъ отъ другихъ причинъ, чѣмъ при разборѣ задачъ сложныхъ; въ послѣднихъ учащихся всего болѣе затрудняетъ раздѣленіе задачъ на рядъ простыхъ, открытіе послѣдовательности, въ которой надо воспользоваться условіями задачи, но сама по себѣ каждая изъ простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ сложной, уже не затрудняетъ (по крайней мѣрѣ не должна) учащихся. При рѣ-

---

*) Выраженія, употребляемыя въ задачѣ, имѣютъ очень большое значеніе; нерѣдко случается, что, измѣнивъ нѣсколько оборотъ рѣчи, прибавивъ слово или подчеркнувъ голосомъ особенно важную часть условій, удается помочь ученикамъ. При рѣшеніи первоначальной задачи (стр. 101) тоже отчасти можно было-бы навести учениковъ на пріемъ рѣшенія, предложивъ ее въ нѣсколько иномъ видѣ: разносщикъ съ покупателя за 15-ть яблоковъ и 10 апельсиновъ просилъ 1 р. 20 к., а за тѣ же 15 яблоковъ и 15 апельсинъ просилъ 1 р. 50 к. и т. д. Но мы думаемъ, что начиная съ такой формы задачъ, впослѣдствіи уже не слѣдуетъ намѣренно облегчать ее: нужно заботиться о развитіи догадливости въ ученикахъ и не пріучать къ разжевыванію условій.

шеніи задачъ на одно дѣйствіе, ученики могутъ затрудняться только тогда, если не понимаютъ самаго вопроса, т. е. не замѣчаютъ, въ какомъ соотношеніи находятся данныя числа, другими словами, не успѣли еще вывести изъ наблюденій общее заключеніе о такомъ соотношеніи данныхъ (не успѣли его *замѣтить*, какъ говорятъ обыкновенно). Такъ какъ затрудненіе въ этомъ случаѣ другого рода, нежели при рѣшеніи сложныхъ задачъ, то и помощь со стороны учителя должна быть направлена въ другую сторону: нужно пополнить оказавшійся недостатокъ наблюденія, т. е. предложить матеріалъ для нагляднаго рѣшенія, или же попробовать помочь уловить отношенія данныхъ, уменьшивъ данныя въ задачѣ числа; послѣдній пріемъ очень часто помогаетъ, такъ какъ дѣти нерѣдко имѣютъ уже нужныя представленія объ отношеніяхъ величинъ, но не успѣли еще обобщить ихъ (отвлечь отъ представлявшихся имъ частныхъ случаевъ), поэтому простого напоминанія о подобныхъ случаяхъ бываетъ достаточно, чтобы ученики могли понять отношеніе данныхъ задачи. Если, напримѣръ, ученики не успѣли еще понять, какъ по цѣнѣ 27 яблоковъ узнать цѣну 47 яблоковъ, то слѣдуетъ предложить ту же задачу, но съ меньшими числами, напримѣръ: 3 яблока стоятъ 12 коп., сколько надо заплатить за 2 яблока *). Если и такое упрощеніе задачи не помогаетъ, то надо дать ученикамъ деньги, уплачиваемыя за 3 яблока въ руки (дать копѣйками) и предложить отдѣлить то, что приходится изъ этихъ денегъ за два яблока **).

---

*) Графъ Л. Н. Толстой подобный пріемъ совѣтуетъ примѣнять во всѣхъ случаяхъ. Изъ предыдущаго видно, что мы считаемъ такой пріемъ неудовлетворительнымъ въ случаѣ серьезныхъ затрудненій, какъ не разъясняющій дѣла. Да и понятно, что одинъ и тотъ-же пріемъ не можетъ быть полезенъ въ столь разнообразныхъ случаяхъ затрудненій. Притомъ всегда слѣдуетъ стремиться заставить работать мысль ученика, а не дѣйствовать только наглядностью.

**) Не мѣшаетъ замѣтить, что для облегченія учащихся лучше переходить отъ цѣны бо̀льшаго числа яблокъ къ цѣнѣ меньшаго числа ихъ, а не наоборотъ, такъ какъ въ первомъ случаѣ при наглядномъ рѣшеніи, раздѣляя плату за яблоки по числу ихъ, ученики увидятъ, сколько приходится на требуемое число (и въ то же время увидятъ, что для разсчета придется воспользоваться цѣной одного яблока). Цѣна одного яблока, конечно, должна быть цѣлымъ числомъ.

На рѣшеніе иныхъ задачъ даже почти невозможно навести учащихся безъ предварительной подготовки, если не желаемъ просто подсказать рѣшеніе (дать готовое рѣшеніе, объяснивъ его). Возьмемъ, напримѣръ, задачу, подобную которой можно найти, кажется, во всякомъ сборникѣ ариѳметическихъ задачъ: одинъ работникъ можетъ скосить лугъ въ 5 дней, другой въ 6 дней; во сколько времени кончатъ они работу, если будутъ косить вмѣстѣ? Дѣти, почти всегда, совершенно не умѣютъ приняться за рѣшеніе такой задачи, и если нѣкоторые пробуютъ приняться рѣшать ее, то обыкновенно складываютъ данныя числа, говоря, что оба работника окончатъ работу въ 11 дней. Указать имъ ошибку легко; но если хотимъ навести на рѣшеніе, то непремѣнно нужно обратить вниманіе дѣтей на необходимость вычисленія, сколько каждый работникъ дѣлаетъ въ одинъ день. (Идя, напримѣръ, отъ допущенія противуположнаго, спрашивая: можетъ ли онъ кончить работу въ одинъ день). Такъ какъ данныхъ чиселъ въ задачѣ всего два, то съ нихъ неизбѣжно приходится начинать рѣшеніе и объясненіе: сами ученики совсѣмъ не могутъ сообразить, какъ приняться за рѣшеніе, какъ воспользоваться числами, поэтому и навести на рѣшеніе безъ подсказыванія его не удается. Что же затрудняетъ учащихся? Учителю необходимо рѣшить этотъ вопросъ, чтобы дѣйствовать разумно и вѣрно направить свою помощь; нѣтъ сомнѣнія, что рѣшить задачу мѣшаетъ дѣтямъ непониманіе необходимости знать количество работы, исполняемой *въ единицу времени*, для разсчета, сколько времени нужно для работы. Дѣти не понимаютъ этого отвлеченно (сознавать это при рѣшеніи вопроса, такъ какъ мѣра работы-отвлеченная: надо узнать, какую *долю работы* исполнитъ каждый работникъ въ одинъ часъ), но на конкретныхъ примѣрахъ могутъ понять легко, если мѣра работы не будетъ выражаться отвлеченнымъ числомъ. Понятно, что при такихъ условіяхъ помочь учащимся можно только предварительной подготовкой: ученики должны дойти предварительно до пониманія указаннаго сейчасъ отвлеченія: „для разсчета, сколько времени нужно для исполненія работы, необходимо знать, сколько успѣваетъ сдѣлать работникъ (или нѣсколько работниковъ) въ одинъ день или въ одинъ часъ (въ единицу времени)“. Если это будетъ достигнуто, навести учениковъ на рѣшеніе предложенной задачи будетъ уже легко:

стоитъ только спросить, какія числа надо знать (что нужно знать), чтобы опредѣлить время, необходимое для исполненія работы. Разсчитать, какую долю работы исполняетъ каждый работникъ въ одинъ часъ, дѣти смогутъ.

Для выработки понятія о данныхъ, при посредствѣ которыхъ можетъ быть опредѣлено время, нужное для исполненія работы, долженъ быть данъ рядъ подготовительныхъ задачъ *). Во-первыхъ, должны быть даны задачи, которыя познакомили бы дѣтей съ тѣмъ, какъ опредѣляется количество работы, исполняемой въ единицу времени. (Рѣшая, напримѣръ, задачи подобныя слѣдующимъ: 1) въ амбарѣ 75 кулей муки; одинъ работникъ можетъ перенести въ другое помѣщеніе всѣ кули въ 5 часовъ; сколько можетъ онъ перенести въ часъ? 2) 5 работниковъ возятъ кирпичи съ барки на берегъ, на баркѣ было всего 45,000 штукъ, работа была окончена въ 3 дня; сколько кирпичей можетъ свезти каждый работникъ въ одинъ день?) Во-вторыхъ, слѣдуетъ познакомить съ обратными задачами, въ которыхъ по количеству всей работы и по количеству работы, исполняемой въ одинъ часъ, опредѣляется время, нужное для работы. Въ третьихъ, надо дать задачи, въ которыхъ опредѣлялось бы, какая доля работы исполняется въ часъ. (Напримѣръ: ученикъ переписалъ всю заданную работу въ три часа; сколько (или какую часть) переписывалъ онъ въ часъ?) Изъ рѣшенія ряда подобныхъ задачъ и должно быть выведено то отвлеченно выраженное заключеніе, которое имѣлось въ виду.

Разберемъ еще, какія задачи слѣдуетъ дать ученикамъ, чтобы они впослѣдствіи могли рѣшить другую изъ разобранныхъ нами сложныхъ задачъ (стр. 102) тоже безъ большой помощи учителя **). Опредѣлить плату, причитающуюся за всѣ дни, опредѣлить уменьшеніе платы за все время, опредѣлить число тѣхъ дней, въ которые онъ не работалъ, когда уже извѣстно насколько уменьши-

---

*) Онѣ также даются не одна за другой, а распредѣляются по курсу.

**) Полное рѣшеніе ея выражается слѣдующими строками:

1) за 45 дней работникъ долженъ былъ получить 2 р. 50 к.$\times$45=67 р. 50 к.

2) Онъ получитъ меньше на 67 р. 50 к.—54 р. 90 к.=12 р. 60 к.

3) За пропущенный день съ него вычитается 1 р. 50 к.+30 к.=1 р. 80 к.

4) Онъ не работалъ 1260 : 180=7 дней.

5) Работалъ онъ 45 д.—7 д.=38 дней.

лась плата за все время и сколько удерживается за одинъ пропущенный день, наконецъ число рабочихъ (въ послѣдней простой задачѣ) не затрудняютъ учащихся; достаточно только, чтобы подобныя задачи встрѣтились ученикамъ во время занятій. Изъ простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ данной, можетъ затруднить только одна: опредѣленіе суммы, которую теряетъ работникъ въ тотъ день, когда не работаетъ. При разборѣ задачи (на стр. 109) было указано, какъ помочь ученикамъ въ ея рѣшеніи (посредствомъ вопроса отъ противуположнаго: развѣ съ него ничего не вычтутъ за ѣду?); дѣти довольно легко соображаютъ, въ чемъ дѣло (хотя иногда опять забываютъ объ этомъ, при разборѣ другой подобной задачи). Теперь посмотримъ, какія задачи полезно предложить, чтобы учащіеся могли научиться опредѣлять послѣдовательность, въ которой должны быть рѣшены эти простыя задачи при рѣшеніи сложной. Опредѣленіе этой послѣдовательности въ сущности одно только и затрудняетъ дѣтей при разборѣ данной сложной задачи. Для достиженія цѣли совѣтуемъ предложить слѣдующій рядъ задачъ (или подобныхъ имъ): 1) Работникъ получаетъ въ день 1 р. 50 к., если же въ какой-нибудь день онъ не работаетъ платы за этотъ день недаютъ; черезъ мѣсяцъ онъ получилъ 37 р. 50 к.; сколько съ него вычли? 2) Работникъ получаетъ въ день 1 р. 50 к., если же въ какой нибудь день не работаетъ, то ему не платятъ и еще съ него удерживается въ этотъ день 30 к. за ѣду; сколько получилъ онъ черезъ мѣсяцъ, если работалъ только 25 дней?*). 3) Работникъ условился работать за 1 р. 50 к. въ день, а черезъ мѣсяцъ получилъ лишь 37 р. 80 к., вѣрно ли сдѣланъ разсчетъ? Если онъ получилъ за 30 дней лишь 37 р. 80 к., сколько съ него вычли за всѣ дни? **). 4) Работникъ въ день получаетъ 1 р. 50 к.; если онъ не работаетъ въ какой-либо день, то плата за все время

*) Рѣшеніе задачъ подобныхъ настоящей даетъ ученикамъ возможность рѣшить ту простую задачу, которая ихъ затрудняетъ, какъ говорилось выше, безъ помощи наводящихъ вопросовъ отъ неизвѣстнаго. Разумѣется, нужно будетъ указать послѣ рѣшенія то, какъ измѣняется плата, если работникъ день не работалъ.

**) Ясное раздѣленіе вопросовъ при постановкѣ условій всегда облегчаетъ учащихся. Первымъ слѣдуетъ ставить тотъ вопросъ, который долженъ быть рѣшенъ прежде. Но въ то же время не нужно дѣлать, для облегченія догадки, изъ этихъ двухъ вопросовъ двухъ отдѣльныхъ задачъ.

работы уменьшается на 1 р. 80 к. за каждый пропущенный день; сколько дней было пропущено, если за мѣсяцъ работникъ получилъ лишь 37 р. 80 к.?

Если ученики будутъ очень способны, то можно и не предлагать всѣхъ задачъ; но такъ какъ эти задачи не будутъ предложены одна за другою, а будутъ отдѣлены одна отъ другой болѣе или менѣе значительнымъ промежуткомъ времени и будутъ предложены въ различной формѣ (теперь имъ придано одинаковое почти содержаніе и въ нихъ даны почти одинаковыя числа, чтобы легче было слѣдить за ихъ отношеніемъ къ разбираемой задачѣ), то они явятся обычными упражненіями въ рѣшеніи задачъ, не обременяющими учащихся, но могущими очень много помочь имъ при рѣшеніи болѣе сложной задачи, отъ которой мы исходили, если только онѣ (т. е. болѣе легкія задачи) не пройдутъ незамѣченными, другими словами—если учитель съумѣетъ воспользоваться ими и сдѣлаетъ по поводу ихъ рѣшенія нужныя указанія, о значеніи и формѣ которыхъ говорилось нѣсколько выше. Первая изъ приведеннаго ряда задачъ обращаетъ вниманіе учащихся на необходимость принимать въ разсчетъ не только условленную плату, но и могущія быть измѣненія ея. (Сами учащіеся очень часто вовсе не замѣчаютъ этого и потому затрудняются разсчетомъ). Вторая задача на примѣрѣ, слѣдовательно какъ бы наглядно, покажетъ, что плата работнику уменьшается и отъ дѣлаемаго вычета, и отъ удержанія поденной платы. Учащіеся, зная число рабочихъ дней, всегда сдѣлаютъ разсчетъ вѣрно: опредѣлятъ дѣйствительно полученную сумму, а потомъ дѣйствительный вычетъ; заставивъ дѣтей сравнить полученную въ дѣйствительности плату съ той, которая причитается за полный мѣсяцъ, легко будетъ на *примѣрѣ*, вполнѣ ясномъ для учащихся, показать, насколько уменьшается мѣсячный заработокъ, если одинъ день будетъ проведенъ работникомъ безъ работы *). Третья задача покажетъ, что при разсчетѣ надо обра-

*) Замѣтимъ здѣсь, что въ подобныхъ случаяхъ, затрудняющихъ нѣсколько учениковъ, весьма важно сперва совсѣмъ не говорить объ этихъ затрудненіяхъ, не упоминать о нихъ въ условіи, а указать на значеніе примѣра уже послѣ разбора его. Въ разсматриваемомъ случаѣ, предлагая задачу, не слѣдуетъ упоминать объ *уменьшеніи* заработка, а нужно требовать разсчета, сколько получитъ работникъ; когда же разсчетъ будетъ уже сдѣланъ—указать на то, какъ уменьшается мѣсячный заработокъ.

щать вниманіе не только на поденную плату, но и на причитающуюся плату за все время работы; а вторая часть ея заставитъ сравнить дѣйствительно полученную плату съ платой, причитающейся за все время. Наконецъ, четвертая задача научитъ разсчитывать число дней, проведенныхъ безъ работы, по уменьшенію заработанной суммы за все условленное время. Рѣшеніе взятой сложной задачи требуетъ сопоставленія всѣхъ этихъ частныхъ задачъ.

Разобравъ подобнымъ же образомъ другія задачи, до умѣнья рѣшать которыя хотимъ довести своихъ учениковъ, можно подобрать всѣ тѣ задачи, которыя должны войти въ курсъ для постепеннаго развитія навыка въ рѣшеніи задачъ и подготовленія учащихся къ рѣшенію болѣе трудныхъ задачъ *). Работа эта—не маленькая, но если она будетъ выполнена только отчасти, лишь относительно нѣкоторыхъ задачъ... и тогда принесетъ она значительную пользу учащимся. Она облегчается еще тѣмъ, что собранныя задачи, нужныя для подготовки къ рѣшенію трудныхъ задачъ, нѣтъ необходимости приводить въ строго опредѣленный порядокъ: онѣ должны распредѣляться по всему курсу, должны сперва имѣть значеніе совершенно самостоятельныхъ задачъ, а потому достаточно, чтобы каждая изъ нихъ встрѣтилась въ извѣстное время курс (смотря по степени трудности), но порядокъ ихъ безъ всякаго затрудненія можетъ быть измѣняемъ. Я утверждаю, что, подобравъ указаннымъ способомъ задачи, преподаватель всегда можетъ постепенно довести своихъ учениковъ до умѣнья рѣшать всѣ задачи на такъ называемыя „правила“ (товарищества, сложнаго тройнаго правила, вычисленія процентовъ и смѣшенія); тогда *прохожденіе* правилъ будетъ излишнимъ, и они получатъ свое настоящее значеніе, т. е. сдѣлаются и въ глазахъ учениковъ простымъ указаніемъ на общій пріемъ рѣшенія однородныхъ задачъ.

Пониманію рѣшеній задачъ и соотношеній данныхъ не мало помогаетъ также обычай провѣрять рѣшенія, т. е. опредѣлять, согласно-ли рѣшеніе съ условіями задачи; провѣрять рѣшенія всѣхъ задачъ нѣтъ надобности, но слѣдуетъ часто это дѣлать, осо-

*) Чтобы не затруднять читателей обиліемъ примѣровъ, но въ тоже время дать разработанный матеріалъ, котораго часто ищутъ въ книгѣ, я приведу еще нѣсколько примѣровъ постепенной подготовки учащихся къ рѣшенію особенно характерныхъ и важныхъ задачъ, въ особомъ прибавленіи къ этой главѣ.

бенно если рѣшавшаяся задача затрудняла учащихся, или учитель желаетъ обратить на нее особенное вниманіе учащихся *).

Мнѣ не разъ уже приходилось говорить, насколько важно для развитія умѣнья понимать и рѣшать задачи не ограничиваться простымъ рѣшеніемъ задачъ, какъ это часто бываетъ, и доводить учащихся до возможно болѣе глубокаго вниканія въ содержаніе рѣшаемыхъ задачъ. Заставить вникнуть въ смыслъ рѣшаемыхъ вопросовъ и пріемы ихъ рѣшенія нетрудно: нужно только побольше останавливаться на разборѣ задачъ и ихъ рѣшеній. (Какъ предлагать задачу—уже сказано.)

Прежде всего нужно позаботиться о возможно болѣе отчетливомъ усвоеніи придуманнаго рѣшенія. Для этой цѣли слѣдуетъ требовать отъ учениковъ, чтобы они пріучались разсказывать составленное рѣшеніе задачи и излагать его письменно, то въ сжатой формѣ, то съ подробнымъ объясненіемъ, смотря по требованію учителя. Чтобы учащіеся привыкли обращать вниманіе на пріемы рѣшенія задачъ, надо послѣ рѣшенія нѣсколькихъ однородныхъ задачъ, вопервыхъ, отвлеченно выражать сущность вычисленія (какъ было сказано и пояснено примѣрами), вовторыхъ — указывать на сходство условій и хода рѣшеній взятыхъ задачъ, поясняя, что такъ и всегда могутъ быть рѣшаемы подобныя задачи. Пріучить дѣтей къ правильному и связному разсказу найденнаго рѣшенія нетрудно: стоитъ только съ самаго начала, при рѣшеніи самыхъ простыхъ задачъ требовать отъ учащихся разсказа о томъ, что они дѣлали для рѣшенія задачи. При переходѣ къ болѣе сложнымъ задачамъ, пересказъ рѣшенія могъ-бы затруднить учащихся, такъ какъ они въ первое время быстро забываютъ последовательность, въ какой производились дѣйствія; записываніе рѣшеній помогаетъ дѣлу. По мѣрѣ рѣшенія каждое вычисленіе записывается на классной доскѣ, одно подъ другимъ, такъ что порядокъ записи показываетъ послѣдовательность, въ которой производились дѣйствія; значеніе каждаго вычисленія помнится учениками, поэтому его нѣтъ надобности и записывать. Смотря на доску, дѣти обыкновенно легко могутъ правильно разсказать ходъ рѣше-

*) Какъ пріучать дѣтей къ повѣркѣ задачъ — будетъ сказано въ прибавленіи къ настоящей главѣ.

нія задачи. Однакоже подобнымъ образомъ записывать дѣлаемыя вычисленія слѣдуетъ только до тѣхъ поръ, пока ученики затрудняются пересказомъ длиннаго, но не труднаго рѣшенія, потому что продолжая записывать такія рѣшенія, которыя уже легко могутъ быть удержаны въ памяти, мы будемъ даромъ терять время и пріучать дѣтей къ ожиданію помощи тамъ, гдѣ они могутъ безъ нея обойтись, т. е. будемъ пропускать случай лишній разъ возбудить самодѣятельность дѣтей. Конечно, всякій хорошій учитель сремится къ противоположному.

Для оживленія занятій пересказъ рѣшенія задачи полезно вести въ различныхъ формахъ, иногда, напримѣръ, требуя только перечисленія по порядку тѣхъ искомыхъ, которыя нужно найти при рѣшеніи задачи, въ другихъ случаяхъ требуя указанія каждаго дѣйствія и цѣли, съ которую оно дѣлается, въ третьемъ случаѣ требуя не отрывочнаго перечисленія частныхъ задачъ (простыхъ, входящихъ въ составъ сложной), но связнаго разсказа о найденномъ пути рѣшенія. Но каждую новую форму упражненій можно вводить только тогда, когда учащіеся вполнѣ освоились съ прежней. Познакомивъ съ новой формой упражненій, слѣдуетъ сдѣлать значительное число соотвѣтствующихъ упражненій, чтобы учащіеся привыкли къ новаго рода работѣ. Смѣна однѣхъ упражненій другими разнообразитъ занятія, но если она дѣлается прежде, чѣмъ учащіеся вполнѣ освоятся съ каждымъ видомъ упражненій, то они будутъ сбиваться, и вмѣсто оживленія занятій мы только напрасно обременимъ учащихся, а въ худомъ случаѣ, пожалуй, наведемъ на нихъ уныніе, сбивъ ихъ съ толку своими требованіями. Нѣтъ надобности также всегда неизмѣнно требовать разсказа рѣшенія; въ легкихъ случаяхъ полезно иногда удовольствоваться полученіемъ отвѣта, чтобы, допуская рбзнообразіе, доставить удовольствіе ученикамъ. Какъ-бы хорошо ни было упражненіе само по себѣ, оно можетъ надоѣдать ученикамъ, и мы думаемъ, что полезно дѣлать имъ иногда уступки; это не помѣшаетъ опытному учителю сохранить обычную требовательность и повиновеніе учащихся, но поможетъ ему ближе встать къ ученикамъ, сдѣлаться имъ пріятнѣе черезъ это; а такой результатъ можетъ принести гораздо больше пользы, чѣмъ неизмѣнная требовательность, неослабная настойчивость. И здѣсь приходится сказать: во всемъ учитель долженъ

знать мѣру, оттого-то такъ и трудно быть хорошимъ учителемъ. Можно сказать вообще, что учитель долженъ быть руководителемъ учащихся и потому долженъ быть требователенъ, долженъ влiять на учениковъ и заставить слушаться, но уступки въ своихъ требованiяхъ онъ долженъ дѣлать: дѣти не машины, которыя могутъ всегда одинаково работать.

Рѣшенiе первой изъ разбиравшихся задачъ можетъ быть, напримѣръ, разсказано слѣдующимъ образомъ.

1) Сперва узнаемъ, насколько второй покупатель заплатилъ больше чѣмъ первый, потомъ узнаемъ, сколько лишнихъ апельсинъ купилъ второй покупатель и т. д., перечисляя, можно сказать, записанныя выше отдѣльныя простыя задачи, входящiя въ составъ сложной. 2) Для рѣшенiя задачи мы отнимемъ 1 р. 20 к., отъ 1 р. 50 к., чтобы узнать, насколько первый покупатель заплатилъ меньше, чѣмъ второй; потомъ узнаемъ, насколько больше купилъ апельсинъ второй, чѣмъ первый, а для того вычтемъ 10 к. изъ 15 к.; за эти 5 апельсинъ, заплачены 30 к.; чтобы узнать, сколько стоитъ одинъ апельсинъ, раздѣлимъ 30 к. на 5 и т. д. 3) Второй покупатель заплатилъ дороже потому, что купилъ больше; узнавъ, насколько больше онъ купилъ апельсинъ и насколько больше онъ заплатилъ, мы узнаемъ, что стоятъ эти добавочные апельсины. Выходитъ, что за 5 апельсинъ покупатель заплатилъ 30 к. Такъ какъ 5 апельсинъ стоятъ 30 к., то одинъ будетъ стоить въ 5 разъ дешевле, т. е 6 к., а десятокъ въ десять разъ дороже одного, т. е. 60 к. (или прямо: десятокъ вдвое дороже 5 апельсинъ, значитъ, мы узнаемъ цѣну десятка апельсинъ, когда удвоимъ цѣну пяти) и т. д.

Различныхъ формъ пересказа рѣшенiя можно придумать очень много, полезно предоставить иногда учащимся и самимъ придумывать формы разсказа (т. е., ничего не говоря имъ, велѣть разсказывать рѣшенiе, если могутъ); но во всякомъ случаѣ важно большинство упражненiй вести въ той или другой, но въ опредѣленной формѣ, чтобы ученики знали, что имъ нужно дѣлать и не останавливались въ недоумѣнiи, чтобы не происходило временныхъ замѣшательствъ, которыми такъ ловко пользуются ученики у слабыхъ учителей, устраивая для себя развлеченiе. Опредѣленность формъ упражненiй всегда способствуетъ болѣе быстрому развитiю

навыка въ рѣшеніи вопросовъ. Когда учащіеся привыкнутъ разсказывать ходъ рѣшенія предлагаемыхъ задачъ, полезно иногда заставлять разсказывать ходъ рѣшенія только что разобранной задачи въ общемъ видѣ, т. е. не называя чиселъ, а только указывая ихъ значеніе. Напримѣръ, рѣшеніе той-же задачи можетъ быть выражено слѣдующимъ образомъ: „сперва надо узнать, насколько второй покупатель заплатилъ больше перваго, а для того надо изъ суммы, уплаченной вторымъ, вычесть то, что уплатилъ первый; далѣе надо узнать, на сколько апельсинъ больше взялъ второй покупатель, а для этого надо вычесть то число апельсинъ, которое купилъ первый, изъ того числа, которое показываетъ, сколько купилъ второй и т. д.“. Конецъ рѣшенія изложимъ для примѣра въ нѣсколько другой формѣ, болѣе легкой, потому что въ ней не требуется связнаго разсказа, а только указываются по порядку тѣ простыя задачи, на которыя распадается данная. Итакъ излагаемъ конецъ рѣшенія въ новой формѣ. „Потомъ узнаемъ цѣну одного апельсина, для этого надо (деньги) сумму, уплаченную за всѣ лишніе апельсины, раздѣлить на число ихъ; а узнавъ цѣну одного апельсина, узнаемъ цѣну десятка, если помножимъ первую на десять; потомъ, надо узнать, что было заплачено за яблоки; для этого изъ суммы, уплаченной за всю покупку, слѣдуетъ вычесть то, что было уплачено за апельсины“ и т. д. Значеніе подобныхъ упражненій было уже указано; даются дѣтямъ они легко.

Съ самаго начала занятій, по моему мнѣнію, нужно стремиться къ тому, чтобы учащіеся могли разсказать придуманное ими рѣшеніе предложенной задачи прежде, чѣмъ примутся за вычисленія.

Записываніе рѣшеній имѣетъ то значеніе, что оно лучше всего закрѣпляетъ въ памяти учащихся рѣшеніе разобранной задачи, помогаетъ охватить его въ цѣломъ объемѣ, заставляетъ учащихся дать себѣ полный отчетъ во всемъ рѣшеніи (безъ этого нельзя и записать), наконецъ лучше всего выражаетъ степень пониманія рѣшенія задачи (какъ цѣлымъ классомъ, такъ и каждымъ учащимся въ отдѣльности, если всѣ ученики записываютъ рѣшеніе у себя въ тетрадяхъ, а на классной доскѣ оно не пишется), слѣдовательно и то, въ какую сторону должны быть направлены усилія учителя.

Письменное объясненіе рѣшенія пріучаетъ учащихся къ послѣдовательному изложенію мыслей.

Въ первое время можно требовать отъ учениковъ записыванія только отдѣльнаго дѣйствія; если они сдѣлаютъ это, то, значитъ, понимаютъ, что надо было сдѣлать для рѣшенія данной простой задачи. Когда учащіеся познакомятся съ обозначеніемъ каждаго изъ четырехъ дѣйствій, можно предлагать записывать рѣшенія сложныхъ задачъ, но не цѣлое рѣшеніе сразу, такъ какъ и запомнить его дѣти въ первое время затрудняются, а послѣдовательно записать его—еще труднѣе. Учащіеся записываютъ каждое отдѣльное вычисленіе, какъ только оно будетъ сдѣлано ими изустно, а послѣдовательность въ записи вычисленій будетъ соблюдаться потому, что записываться они будутъ въ томъ-же порядкѣ, въ какомъ дѣлаются. Располагать всѣ дѣлаемыя вычисленія слѣдуетъ непремѣнно держась какой-нибудь опредѣленной, принятой учителемъ формы. Безпорядочно разбросанное вычисленіе не даетъ возможности ни обозрѣть ходъ рѣшенія, не удобно провѣрить вычисленія, если въ нихъ окажется ошибка, тогда какъ все это легко дѣлается при правильномъ расположеніи вычисленій, а вмѣстѣ съ тѣмъ учащіеся привыкаютъ систематически вести работу, не кидаясь отъ одного вычисленія къ другому. Но, разумѣется, важно только, чтобы была *опредѣленная* форма, а формы могутъ быть различны. Удобная форма для записи въ сжатомъ видѣ хода рѣшенія—записываніе каждаго отдѣльнаго вычисленія въ особой строкѣ (въ такой формѣ, только съ прибавкôй еще въ каждой строкѣ указанія значенія числа, получаемаго при вычисленіи, приведены были рѣшенія разбиравшихся выше задачъ). Такъ какъ въ первое время обученія вычисленія дѣлаются только съ маленькими числами, то записывать слѣдуетъ только данныя и результатъ вычисленія, самое же вычисленіе производится въ умѣ *). Когда числа задачъ сдѣлаются настолько велики, что вычисленія уже нельзя будетъ производить въ умѣ, все-таки послѣ выполненія вычисленій полезно записать ходъ рѣшенія въ видѣ строчекъ, чтобы удобно было его обозрѣть; но непремѣнно слѣдуетъ наблюдать за правильностью расположенія самыхъ вычисленій. Дѣти, предоставленныя самимъ себѣ, ужасно любятъ дѣлать вычисленія на разныхъ клочкахъ бумажекъ, даже просто на столѣ, только не въ тетради, желая сохранить чистоту послѣдней;

*) Почему вычисленія должны дѣлаться въ умѣ—говорилось въ первыхъ главахъ руководства.

но чтобы пріучить къ настоящей чистотѣ и порядку, необходимо требовать производства всѣхъ вычисленій въ тетради: тогда только привыкнутъ дѣти заботиться о порядкѣ вычисленій, зная, что учитель можетъ видѣть всѣ ихъ работы.

Пріучивъ къ устному объясненію цѣли каждаго дѣлаемаго вычисленія и къ пересказу цѣлыхъ рѣшеній, слѣдуетъ перейти къ письменному выраженію хода рѣшенія, сперва въ видѣ прибавленія письменнаго указанія, какое число найдено вычисленіемъ строки (какъ это сдѣлано въ приведенныхъ примѣрахъ разбора задачъ), а потомъ и письменнаго изложенія объясненія рѣшенія въ видѣ связнаго разсказа, подобнаго тѣмъ, которые приведены выше, какъ примѣры устнаго разсказа о ходѣ рѣшенія задачи. При переходѣ къ письменнымъ упражненіямъ необходимо соблюдать правило: не давать такой письменной работы, которая не была-бы не только подготовлена во время занятій въ классѣ, но даже вполнѣ продѣлана и усвоена учениками, т. е. письменная работа новаго рода должна представлять простое письменное повтореніе того, что вполнѣ выработано и нѣсколько разъ повторено на урокѣ. Для дѣтей излагать письменно свои мысли, вслѣдствіе непривычки, такъ трудно, что не выработавъ предварительно съ учителемъ, что имъ нужно написать, они часто совсѣмъ теряются и не могутъ сколько-нибудь правильно изложить то, что требуется. Когда же дѣти привыкнутъ къ письменнымъ работамъ какого либо рода, можно предлагать такого же рода работы безъ предварительной подготовки ихъ на урокѣ. Въ одноклассной школѣ связнаго изложенія рѣшенія задачи требовать не слѣдуетъ.

Здѣсь я считаю нужнымъ обратить вниманіе на значеніе упражненій въ связномъ изложеніи задачъ. Какъ ни хорошо само по себѣ упражненіе въ записываніи рѣшеній задачъ отдѣльными строками, но имъ однимъ ограничиваться въ 5-ти лѣтнемъ курсѣ нельзя: дѣти пріучаются тогда къ отрывочности изложенія, такъ какъ отъ нихъ подобное только изложеніе (отвѣтъ на вопросъ) и требуется.

Письменныя работы (вычисленія и рѣшенія задачъ) получаютъ особенное значеніе, когда приходится заниматься съ двумя или тремя отдѣленіями разомъ: они представляютъ тогда единственное средство пополнить недостатокъ упражненій, дѣлаемыхъ съ учителемъ, и занять учащихся работой въ то время, когда преподаватель

занятъ съ другимъ отдѣленіемъ. Получать новыя свѣдѣнія учащіеся, конечно, должны только отъ учителя (впослѣдствіи, когда выучатся понимать прочитанное, не разсказы для чтенія, а статьи, сообщающія научныя свѣдѣнія, и учебники, могутъ почерпать новыя свѣдѣнія и изъ книгъ), но письменныя упражненія могутъ дать обильный матеріалъ для упражненія въ томъ, что пройдено, для пріобрѣтенія необходимаго навыка въ работахъ каждаго рода. Дѣти охотно занимаются письменными работами, какъ рѣшеніемъ задачъ, такъ и вычисленіями; однакоже, во время занятій учителя съ однимъ изъ отдѣленій ариѳметикой, вовсе нѣтъ необходимости давать другимъ отдѣленіямъ работу непремѣнно тоже по ариѳметикѣ, какъ думаютъ иные; вполнѣ удобно дать работу и по русскому языку или по какому либо другому предмету; какую именно работу слѣдуетъ дать—можетъ рѣшить только самъ учитель, сообразуясь съ ходомъ всѣхъ занятій своихъ учениковъ.

Кромѣ письменныхъ работъ собственно, во время занятій ариѳметикой полезно предлагать учащимся записывать кое-что и во время устныхъ занятій. Полезно, напримѣръ, иногда предлагать учащимся, когда они выучатся записывать ходъ рѣшенія задачи, писать его на своихъ доскахъ тотчасъ-же послѣ того, какъ задача будетъ рѣшена во время самаго урока; учитель, пока дѣти пишутъ, просматриваетъ ихъ работу и такимъ образомъ видитъ, какъ ведетъ ея каждый отдѣльный ученикъ, или по крайней мѣрѣ многіе изъ нихъ, ищетъ-ли кто изъ учениковъ помощи у сосѣдей или нѣтъ *) и т. д. Полезно также упражнять иногда въ записываніи вычисленій дѣлаемыхъ въ классѣ примѣровъ, придумываемыхъ самими учениками на объясненное имъ правило и т. п. Одно неудобство можетъ быть при этомъ: если преподающій не владѣетъ классомъ, то для дѣтей держаніе досокъ и грифелей въ рукахъ служитъ поводомъ къ шалостямъ: то катится грифель и его ловятъ, то стучитъ доска, то любовь къ собственнымъ рисункамъ увлекаетъ учащагося, заставляя его забыть объ учителѣ и его объясненіяхъ. Тогда ужь лучше не позволять дѣтямъ вынимать

*) Иногда дѣти, не могущія сами ничего сдѣлать, стараются придать себѣ видъ ученика, легко могущаго исполнить данную работу, у котораго даже другіе ищутъ помощи и отъ которыхъ они загораживаются тетрадками, книгами и т. п. Это не мѣшаетъ знать учителямъ.

доски, а что нужно—записывать на классной доскѣ: потеря будетъ меньше, чѣмъ отъ нарушенія правильности хода занятій. Другое дѣло письменныя работы, предлагаемыя дѣтямъ во время занятій съ другимъ отдѣленіемъ: тогда дѣти имѣютъ передъ собою только одну работу.

До сихъ поръ я говорилъ о томъ, какъ рѣшать задачи и повѣрять ихъ, какъ подготовлять къ нимъ учащихся, какъ закрѣплять въ ихъ памяти найденное рѣшеніе и провѣрять правильность его пониманія. Но всего этого недостаточно, если мы не хотимъ довольствоваться развитіемъ въ учащихся навыка рѣшать болѣе или менѣе сложныя задачи, но стремимся довести ихъ до возможно большаго развитія. Послѣднему же лучше всего (мы говоримъ о занятіяхъ ариѳметикой) можетъ способствовать работа надъ послѣдовательными теоретическими выводами изъ пройденнаго и разборъ задачъ, по возможности разносторонній. О значеніи первой уже говорилось, на второмъ мы остановимся теперь. Довольствуясь одними *рѣшеніями* задачъ, мы не дадимъ учащимся случая хорошенько вдуматься въ рѣшаемый вопросъ, настолько мало заставляемъ вдумываться, что большинство учащихся обыкновенно только и умѣютъ „*рѣшать задачи*", но не тѣ численные вопросы, съ которыми они встрѣчаются въ жизни, какъ только форма этихъ вопросовъ не подходитъ подъ форму изложенія задачъ. Ученики работаютъ недостаточно самостоятельно. И на это до сихъ поръ у насъ еще мало обращается вниманія; въ существующихъ сборникахъ мало можно найти подходящаго матеріала для требуемой нами работы, а пріемовъ веденія послѣдней, сколько намъ помнится, нигдѣ не указано. Учитель долженъ стремится къ тому, чтобы учащіеся не только хлопотали-бы о полученіи „отвѣта", т. е. окончательнаго результата, но и обдумывали, правильно-ли поставленъ самый вопросъ, можетъ-ли онъ быть рѣшенъ, при какихъ условіяхъ рѣшеніе дѣлается невозможнымъ и т. п. Всему этому можетъ научить только разносторонній разборъ задачъ (непремѣнно послѣ ихъ рѣшенія); причина этого будетъ видна изъ послѣдующихъ объясненій.

Каждая задача, сама по себѣ, есть вопросъ, который долженъ быть рѣшенъ на основаніи тѣхъ условій, которыя даны (или „данныхъ", какъ обыкновенно говорятъ); если вопросъ (задача) данъ

ариѳметическій, то данныя непремѣнно должны быть выражены въ числахъ, и отвѣтъ также долженъ быть данъ численный. Рѣшить ариѳметическую задачу и значитъ найти число, удовлетворяющее поставленнымъ условіямъ *). Но вопросы или задачи могутъ быть различнаго рода. Могутъ быть поставлены такія условія, которымъ или вовсе нельзя удовлетворить, или нельзя удовлетворить всѣмъ одновременно; тогда задача называется *невозможною*. Иногда можетъ быть найдено нѣсколько различныхъ рѣшеній задачи (вопроса), значитъ для рѣшенія ея данныхъ было недостаточно; задача называется тогда *неопредѣленною*. Если-же рѣшеніе можно найти и притомъ только одно, то задача называется *возможною и опредѣленною*. Таковы почти всѣ задачи, помѣщаемыя въ нашихъ сборникахъ. Но опредѣленная задача иногда возможна только при извѣстной величинѣ данныхъ, а при измѣненіи величины ихъ дѣлается невозможною, хотя соотношенія данныхъ (ихъ взаимная зависимость) нисколько не измѣнились, а только величина ихъ; тогда задача называется возможною при извѣстныхъ условіяхъ. (Величина данныхъ можетъ измѣняться, какъ говорятъ, только въ извѣстныхъ предѣлахъ). Пояснимъ это простымъ примѣромъ. Не трудно найти два числа, если извѣстна ихъ сумма и сказано, насколько одно число больше другого; сумма чиселъ и разность ихъ (показывающая насколько одно число больше другого) будутъ въ этомъ случаѣ данными, а неизвѣстныя слагаемыя—искомыми. Положимъ, сумма равна 24, а разность 10; тогда одно изъ слагаемыхъ равно 7, другое 17 (24—10=14, 14:2=7, 7+10=17); задача возможна и имѣетъ опредѣленное рѣшеніе. Но какъ только мы назначимъ такую разность, которая больше суммы, то задача сдѣлается невозможной при взятыхъ величинахъ данныхъ. Не можетъ быть такихъ чиселъ, изъ которыхъ одно больше другаго на 30 единицъ, а сумма ихъ 24, **)

*) При этомъ всегда подразумѣвается, что это число найдено не подборомъ чиселъ, не случайно, а путемъ такихъ послѣдовательныхъ вычисленій, изъ которыхъ каждое имѣетъ вполнѣ опредѣленное значеніе, вытекающее изъ условій вопроса и которое рѣшавшій задачу можетъ объяснить.

**) Я подразумѣваю только ариѳметическія рѣшенія, допуская отрицательныя рѣшенія, конечно можно условно рѣшить задачу и при новой величинѣ данныхъ.

т. е. задача возможна только при извѣстномъ условіи: чтобы данная разность чиселъ была меньше ихъ суммы. Нетрудно привести примѣръ и такой задачи, которую всегда можно рѣшить, какова бы ни была величина данныхъ, даже задачу похожую на предъидущую: по суммѣ двухъ чиселъ и частному ихъ (показывающему, во сколько разъ одно число меньше или больше другаго) найти эти числа; если сумма чиселъ$=10$, частное ихъ равно, положимъ, 3, то меньшее изъ нихъ равно $10{:}=(3+1)$ или $10{:}4=2^1/_2$, а большее$=10-2^1/_2=7^1/_2$.

Можетъ быть и такой случай, что рѣшеніе задачи при извѣстной величинѣ данныхъ теряетъ свое значеніе отъ прибавки условій, не вліяющихъ на самый ходъ рѣшенія. Положимъ, дана ученикамъ задача: отъ Петербурга до Москвы 604 в.; одинъ изъ поѣздовъ ж. д. выходитъ въ 9 час. утра и идетъ по 26 верстъ въ часъ, а другой отходитъ въ 3 ч. дня и дѣлаетъ по 40 верстъ въ часъ; черезъ сколько часовъ второй поѣздъ догонитъ первый? Рѣшеніе задачи понятно. Если теперь измѣнимъ часы отправленія, напримѣръ скажемъ, что второй поѣздъ отходитъ не въ 3 ч. дня, а 7 час. вечера, то хотя и возможно будетъ по прежнему высчитать, черезъ сколько часовъ второй поѣздъ догонитъ первый, но рѣшеніе не будетъ имѣть значенія: случиться это должно было бы уже за Москвой, т. е. на разстояніи большемъ 604. Ученики почти всегда не замѣчаютъ этого, такъ какъ не имѣютъ обыкновенія вникать въ вопросъ. Чтобы хотя нѣсколько пріучить болѣе внимательно относиться къ поставленнымъ условіямъ, полезно предлагать такія задачи, указывая потомъ на несообразность даннаго отвѣта, которую ученики тогда легко понимаютъ и весело исправляютъ свою ошибку. Впрочемъ, измѣнивъ нѣсколько постановку вопроса, а именно спрашивая: *на какомъ разстояніи передъ Москвой* второй поѣздъ догонитъ первый, можно надѣяться, что учащіеся, сдѣлавъ вычисленія, сами замѣтятъ недостатокъ времени для того, чтобы второй поѣздъ могъ догнать первый поѣздъ: онъ раньше второго достигнетъ Москвы.

Вслѣдствіе той же непривычки обдумывать вопросъ, ученики или затрудняются рѣшить, или неправильно рѣшаютъ вопросы, подобные слѣдующимъ: одинъ человѣкъ можетъ дойти отъ Петербурга до Новгорода въ 5 дней, во сколько времени дойдутъ трое? ку-

пленный кусокъ холста въ 22 аршина надо разрѣзать на полотенца, каждое длиною въ два аршина; сколько разъ придется разрѣзать? и т. д. Такіе вопросы, по нашему мнѣнію, изрѣдка полезно предлагать ученикамъ: они пріучатъ лучше вникать въ условія вопроса, а учащимся всегда нравятся. Не надо только увлекаться ими: тогда уже выйдетъ не дѣло, а забава.

При рѣшеніи всякаго вопроса или задачи *всѣ* условія вопроса должны быть приняты во вниманіе, зависимость же между данными указываетъ, какія дѣйствія должны быть произведены для рѣшенія вопроса; другими словами, рѣшеніе вопроса (отвѣтъ) должно удовлетворить всѣмъ даннымъ условіямъ. Если данная задача была опредѣленной и возможной (обыкновенная задача), то, отбрасывая въ ней какое-нибудь условіе, мы черезъ это обратимъ ее въ неопредѣленную, если отброшенное условіе было необходимо для окончательнаго опредѣленія искомаго, т. е. если можно было найти только одно число, которое удовлетворяло-бы всѣмъ даннымъ условіямъ. Тогда мы получаемъ задачу, рѣшеніе которой должно удовлетворять уже не всѣмъ прежнимъ требованіямъ. Если, напримѣръ, во взятой выше задачѣ мы отбросимъ то условіе, что одно число больше другого на 10 (или во второй задачѣ условіе, что одно число больше другого въ 3 раза), оставивъ прежнее условіе, что сумма искомыхъ=24 (или 10—во второй задачѣ), то получимъ задачу, которая можетъ имѣть множество рѣшеній. Въ самомъ дѣлѣ, паръ такихъ чиселъ, сумма которыхъ равна 24 (или 10) множество: 2 и 22, 10 и 14, $5^1/_2$ и $18^1/_2$ и т. д. Задача возможна и опредѣленна, если данныхъ условій достаточно; если мы прибавимъ къ даннымъ еще какое-нибудь условіе, и прежнее рѣшеніе не будетъ удовлетворять новому требованію, а рѣшеніе было только одно, то, очевидно, найти рѣшеніе, удовлетворяющее всѣмъ условіямъ (вмѣстѣ съ новыми) совсѣмъ нельзя—задача дѣлается *невозможною*. Если же новое условіе не противорѣчитъ, какъ говорятъ, прежнимъ, т. е. можетъ быть найдено число, удовлетворяющее какъ прежнимъ, такъ и новому условіямъ, то новое условіе будетъ *лишнимъ*: было только одно число, удовлетворявшее прежнимъ условіямъ, оно же удовлетворяетъ, значитъ, и новому; но мы это число уже и прежде знали, слѣдовательно новое условіе вовсе не нужно для опредѣленія искомаго, ли-

шнее. Прибавивъ ко взятой задачѣ, напримѣръ, что числа, сумма которыхъ 24, а разность 10, должны еще удовлетворять новому требованію: частное ихъ должно быть равно 3, мы сдѣлаемъ задачу невозможною. Прибавивъ въ той же задачѣ условіе, что одно изъ искомыхъ должно быть больше половины суммы на 5, мы прибавимъ лишнее условіе: такъ всегда само собою будетъ. Можно прибавить условіе, что одно искомое должно быть больше другаго въ $2^3/_7$ раза (а не въ три раза); тогда задача также останется возможною, потому то прежнія искомыя удовлетворяютъ и новому требованію; прибавленное условіе будетъ лишнимъ; когда же требовалось, чтобы одно число было не въ $2^3/_7$, а въ 3 раза больше другаго—новое требованіе противорѣчило прежнимъ.

Въ возможной и въ тоже время опредѣленной задачѣ всѣ данныя условія, если нѣтъ лишнихъ между ними, необходимы и вполнѣ опредѣляютъ искомое, поэтому всѣ они находятся въ такой зависимости между собою и съ искомымъ числомъ, что каждое изъ данныхъ можетъ быть найдено по другимъ числамъ (остальнымъ даннымъ и искомому, которое слѣдовательно въ этомъ случаѣ дѣлается также даннымъ). Во взятомъ примѣрѣ можно принять за искомое или сумму чиселъ (сами они тогда уже будутъ данными), т. е. число 24, или разность ихъ, т. е. число 10; та и другая обратная задача рѣшаются очень легко.

Нѣкоторымъ читателямъ можетъ быть покажется, что все сказанное о переходѣ задачъ изъ опредѣленныхъ въ неопредѣленныя или невозможныя и обратно, удобно можно прослѣдить на такихъ отвлеченныхъ задачахъ, какъ приведенная нами для примѣра, и трудно примѣняется къ задачамъ съ конкретными числами. Примѣнимъ сказанное къ одной изъ прежнихъ (чтобы не приводить новыхъ и не занимать даромъ мѣста) сложныхъ задачъ. Возьмемъ прежнюю задачу на опредѣленіе цѣны яблокъ и апельсинъ. Эта задача также возможна и опредѣленна; отъ прибавленія новаго условія она дѣлается невозможной; напримѣръ, если будетъ сказано, что третій покупатель взялъ 15 яблоковъ и 20 апельсинъ и заплатилъ 1 р. 60 к., то прежнія искомыя этому новому условію удовлетворить не могутъ; если же будетъ сказано, что третій покупатель заплатилъ за свою покупку 1 р. 80 к., то прибавленное условіе не будетъ противорѣчить прежнимъ, но будетъ лишнимъ.

Задача сдѣлается невозможною и въ томъ случаѣ, если прибавимъ, что апельсины обошлись втрое дороже яблокъ: числа, показывающія цѣны тѣхъ и другихъ вполнѣ опредѣлялись прежними условіями, а потому не могутъ удовлетворить новому; если-же будетъ сказано, что за апельсины было заплачено въ $1^1/_2$ раза дороже чѣмъ за яблоки, то это новое условіе не будетъ противорѣчить прежнимъ, но будетъ лишнимъ. Задача можетъ сдѣлаться невозможною при перемѣнѣ только величины данныхъ, т. е величина послѣднихъ можетъ измѣняться лишь въ извѣстныхъ предѣлахъ. Если будетъ сказано, что первый покупатель заплатилъ 1 р. 20 к., а второй, купившій больше, заплатилъ меньше, напримѣръ 80 к., то, конечно, рѣшить задачу (удовлетворить условіямъ) будетъ невозможно.

Если одно изъ условій задачи будетъ отброшено, то задача сдѣлается неопредѣленною, т. е. можно будетъ найти нѣсколько чиселъ, удовлетворяющихъ оставшимся условіямъ. Положимъ, напримѣръ, что въ задачѣ не будетъ сказано, сколько заплатилъ второй покупатель—тогда цѣна яблокъ и апельсинъ можетъ быть различна. Задача сдѣлается неопредѣленной и тогда, если будетъ сказано, сколько яблокъ купилъ второй и сколько заплатилъ за всю покупку, но не будетъ сказано, сколько было куплено имъ апельсинъ и т. д.

Если искомыя задачи будутъ извѣстны, то каждое изъ данныхъ можетъ быть принято за искомое и найдено по остальнымъ даннымъ и по прежнимъ искомымъ. Принявъ за искомое число яблокъ, купленныхъ первымъ покупателемъ, мы получимъ обратную задачу, въ которой нѣкоторыя изъ прежнихъ данныхъ можно даже не включать, какъ лишнія: 10 яблокъ стоятъ 40 к., 10 апельсинъ 60 к., покупатель взялъ 10 апельсинъ и нѣсколько яблокъ, заплативъ за все 1 р. 20 к., сколько купилъ онъ яблокъ? Другая обратная задача получится, если будетъ сказано число яблокъ, купленныхъ первымъ покупателемъ, а число апельсинъ будетъ искомымъ. Еще двѣ обратныя задачи получатся, если искомыми будутъ число яблокъ или число апельсинъ, купленныхъ вторымъ покупателемъ. Новыхъ двѣ обратныхъ задачи можно получить, принявъ за искомое сумму, уплаченную первымъ покупателемъ, или сумму, уплаченную вторымъ. Задача получится слѣдующая: десять яблокъ стоятъ 40 к., 10 апельсинъ 60 к.;

сколько долженъ заплатить покупатель, взявшій 15 яблокъ и 10 апельсинъ? Обратныхъ задачъ всегда получается столько, сколько было данныхъ, такъ какъ каждое изъ нихъ можетъ быть принято за искомое.

Задачи дѣлаются невозможными, если мы прибавимъ какое-нибудь новое условіе; но это нисколько не мѣшаетъ обращать данную задачу въ задачу все болѣе и болѣе сложную, вводя все новыя условія, только дѣйствуя не такъ, какъ прежде. Вводя новое условіе, которымъ требуется соблюденіе еще новой зависимости между данными, кромѣ прежней (напримѣръ, требуя, чтобы числа, сумма которыхъ равна 24, не только были одно больше другаго на 10 но, въ тоже время, одно больше другаго въ три раза) мы обращаемъ задачу въ невозможную; но если мы поступимъ иначе, сдѣламъ одно изъ данныхъ искомымъ, для опредѣленія котораго нужно будетъ дать два новыхъ данныхъ—задача сдѣлается болѣе сложной (такъ какъ число данныхъ увеличится и въ составъ рѣшенія войдетъ одной простой задачей больше), но остается возможною и дающею то же самое окончательное рѣшеніе. Въ разбиравшейся задачѣ, напримѣръ, мы можемъ предположить, что сумма, уплаченная вторымъ покупателемъ, не дана, а сказано, что она больше первой въ $1^1/_4$ раза. Такимъ образомъ прежнее данное придется отыскивать, умножая первую сумму на $1^1/_4$, т. е. рѣшая новую простую задачу, отчего данная сложная задача еще болѣе усложнится. Каждое изъ новыхъ данныхъ, въ свою очередь, можетъ быть сдѣлано искомымъ, а также каждое изъ первоначальныхъ данныхъ и т. д. безъ конца.

Со всѣмъ, что здѣсь сказано о задачахъ, полезно познакомиться учащимся, не въ такой общей формѣ, какъ высказано нами, но практически, на примѣрахъ. Почему это полезно? Да потому, что упражненія подобнаго рода относятся прямо къ *изслѣдованію* вопросовъ, рѣшаемыхъ учениками и вполнѣ доступныхъ для нихъ, также какъ доступно и самое изслѣдованіе, а ничто не дѣйствуетъ такъ благотворно на развитіе учащихся, какъ изслѣдованіе тѣхъ вопросовъ, которые они рѣшаютъ, и вообще тщательная разработка тѣхъ свѣдѣній, которыя сообщаются дѣтямъ. Изслѣдованіе вопроса заставляетъ дать себѣ отчетъ въ каждомъ шагѣ рѣшенія, придаетъ осмысленность всему, что дѣлается, и это вполнѣ чувствуютъ

учащіеся и всегда интересуются подобными работами. Конечно, упражненія подобнаго рода не могутъ быть даны въ первое время обученія, многіе изъ нихъ даже въ первые годы обученія; нужна осторожность, чтобы не превысить силы учащихся, не обременить ихъ и не надоѣсть ученикамъ (а то и другое легко можетъ быть, если требованія учителя превышаютъ силы учащихся), иначе можно внушить даже отвращеніе къ предмету, но, осторожность въ введеніи упражненій и исключеніе ихъ,—не одно и то же; если-же занятія доступны учащимся, то они, какъ я сейчасъ сказалъ, очень полезны для учащихся. Какое вліяніе оказываетъ отсутствіе упражненій въ разборѣ задачъ уже было указано. Что упражненія подобнаго рода, ведущіяся на практическихъ примѣрахъ, дѣйствительно доступны для учащихся, каждый учитель можетъ самъ испробовать на практикѣ. Скажу при этомъ, что у нѣкоторыхъ учителей могутъ даже неудаваться подобныя упражненія, хотя у большинства учителей, думаю, будутъ удаваться вполнѣ; неудача будетъ зависить отъ *личнаго* несочувствія учителя къ пробуемымъ упражненіямъ, отъ его направленія и отъ его подготовки. Вопросы преподаванія, особенно вопросы о пригодности или не пригодности тѣхъ или другихъ пріемовъ, никогда не могутъ быть рѣшаемы отдѣльными лицами (не для себя только, а для всѣхъ вообще, т. е. по существу, не примѣняясь къ личнымъ качествамъ рѣшающаго), а только большинствомъ голосовъ и, прибавимъ, голосовъ людей хорошо знакомыхъ съ предлагаемыми пріемами, т. е. подготовленныхъ. Звуковой методъ обученія грамотѣ, когда онъ вводился у насъ, возбуждалъ сильные споры, признавался многими непригоднымъ, особенно много возставали противъ него начальные учителя, а теперь онъ вошелъ во всеобщее употребленіе.

Можетъ быть, меня упрекнутъ и въ томъ, что я говорю такъ подробно о составѣ задачъ, будутъ говорить, что для начальныхъ учителей такія подробности совсѣмъ ненужны. Но, вопервыхъ, я имѣю въ виду составить руководство къ преподаванію ариѳметики вообще, которое годилось-бы для всѣхъ начинающихъ учителей, слѣдовательно долженъ по возможности полно разработать поставленную задачу; вовторыхъ, въ такихъ начальныхъ школахъ, какъ городскія училища съ 6-ти лѣтнимъ курсомъ, большинство подобныхъ упражненій, если только не всѣ, вполнѣ при-

мѣнимо и, думаю, полезно; въ третьихъ, мы думаемъ, что сельскимъ учителямъ, если имъ и не придется вовсе примѣнять на практикѣ описываемыя упражненія, полезно познакомиться съ подробной разработкой цѣлаго курса; пониманіе значенія каждой части курса и каждаго упражненія будетъ тогда шире и глубже, а это непремѣнно выгоднымъ образомъ отразится на томъ, что будетъ примѣняться на практикѣ. *) Наконецъ я уже указывалъ, что отдѣлъ о задачахъ, имѣющихъ такое громадное значеніе въ курсѣ ариѳметики, еще недостаточно разработанъ въ нашей педагогической литературѣ.

Приводимъ еще перечисленіе важнѣйшихъ упражненій, которыя могутъ быть полезны для подготовки учащихся къ разбору задачъ и постепеннаго къ этому перехода; упражненія эти полезны и сами по себѣ, не только какъ подготовительныя къ дальнѣйшимъ работамъ. Многія изъ нихъ уже были указаны раньше, какъ упражненія необходимыя для пріобрѣтенія навыка въ рѣшеніи задачъ. Когда рѣшеніе задачи бываетъ уже составлено, кромѣ прежнихъ упражненій полезно: 1) обращатъ вниманіе учащихся на родъ тѣхъ чиселъ, по которымъ было найдено искомое; 2) предлагать придумывать другія данныя, по которымъ могло бы быть найдено искомое число; 3) указывать, что неизвѣстное число всегда опредѣляется по двумъ даннымъ, если только не представляетъ сумму нѣсколькихъ чиселъ и если искомое—именованное число, то данныя или должны быть оба именованными числами того же рода, какъ искомое, или одно именованнымъ такого же рода, а другое отвлеченнымъ, показывающимъ во сколько разъ или на сколько искомое больше или меньше даннаго; если же искомое есть число отвлеченное, то данныя должны быть оба отвлеченными числами, или оба именованными, однородными между собою (въ послѣднемъ

---

*) Мы не желаемъ принимать на себя диктаторскій тонъ, да еще въ такомъ живомъ дѣлѣ, какъ преподаваніе, не смотря на свои многолѣтнія непосредственныя занятія съ начальными учителями и въ школѣ, не считаемъ свои совѣты единственно полезными, желаемъ ихъ разъяснить и подѣйствовать на читателей убѣжденіемъ. Руководство къ преподаванію какого бы то ни было предмета не есть учебникъ (его и не можетъ быть), а изложеніе извѣстной теоріи преподаванія, сопровождаемой и поясняемой практическими совѣтами. Примѣнить подобную теорію можно только по убѣжденію, а не по приказанію.

случаѣ искомое представляетъ собою кратное отношеніе данныхъ). Пріучивъ учащихся опредѣлять, по какимъ числамъ могутъ быть находимы извѣстнаго рода искомыя, можно составлять послѣ рѣшенія задачъ планъ послѣдняго, начиная отъ неизвѣстнаго и записывая, по какого рода даннымъ оно находилось. Повѣрка рѣшенія задачи посредствомъ опредѣленія, удовлетворяетъ-ли найденное рѣшеніе условіямъ задачи, а не посредствомъ простаго пересмотра сдѣланныхъ вычисленій, всегда представляетъ собою рѣшеніе одной изъ задачъ, названныхъ нами обратными (въ нихъ искомое принимается за извѣстное, а одно изъ прежнихъ данныхъ за искомое), слѣдовательно составляетъ первый шагъ къ составленію послѣднихъ. Полезно также пріучать дѣтей къ придумыванію иногда ими самими задачъ на данное правило или требующія производства при рѣшеніи ихъ назначенныхъ учителемъ дѣйствій. Но надо замѣтить, что на практикѣ часто встрѣчается крайнее увлеченіе придумываніемъ задачъ, даже требуютъ придумыванія ихъ на экзаменѣ. Это уже вполнѣ неумѣстно: второстепенное будетъ затемнять главное и одному изъ видовъ классныхъ упражненій (придумываніе примѣра) будетъ придаваться курсовое знаніе, какъ будто упражненіе это составляетъ дѣйствительное значеніе. Очень хорошо дѣйствуетъ на учащихся рѣшеніе нѣкоторыхъ задачъ, особенно задачъ интересныхъ, или очень часто встрѣчающихся и важныхъ, различными способами. (Раньше, еще въ первой части, мы говорили, что учащимся во всякомъ случаѣ слѣдуетъ предоставлять возможность рѣшать задачу по ими самими придуманному пріему, если только онъ вѣренъ, не требуя, чтобы учащіеся слѣдовали тому пріему, который предполагалъ употребить учитель; если-же ученикъ, желая рѣшить задачу по своему, разсуждаетъ невѣрно, то его слѣдуетъ остановить, чтобы не терять даромъ времени, не тянуть рѣшеніе задачи и не запутывать мысль другихъ учениковъ; въ случаѣ убѣжденія остановленнаго ученика въ правильности придуманнаго рѣшенія, лучше всего предоставить ему разсказать свое рѣшеніе послѣ, въ промежутокъ между занятіями, или послѣ уроковъ).

Упражненія съ задачами могутъ быть, какъ видно изъ сдѣланныхъ указаній на нихъ, очень разнообразны, но никогда не слѣдуетъ продѣлывать многія упражненія надъ одной и той же за-

дачей, какъ иногда поступаютъ учителя. Продолжительныя занятія одной и той же задачей во всякомъ случаѣ надоѣдаютъ дѣтямъ гораздо скорѣе, чѣмъ тѣ-же упражненія, но относящіяся къ различнымъ задачамъ. Очень разнобразить упражненія, даже и относя ихъ къ различнымъ задачамъ, можно только при повтореніи; содержаніе же каждаго отдѣльнаго урока должно быть всегда очень опредѣленное и небольшое по объему: умъ ребенка не можетъ слѣдить за быстрыми переходами мысли отъ одного предмета къ другому и очень быстро отъ нихъ утомляется; каждое упражненіе кажется тогда дѣтямъ гораздо труднѣе, чѣмъ оно есть.

Если, напримѣръ, при рѣшеніи задачи спрашивалось, отчего слѣдуетъ производить тѣ дѣйстаія, которыя указывались, а не другія, то можно не переспрашивать всего хода рѣшенія, когда оно будетъ высказано по частямъ. Если разспрашиваемъ учащихся какъ сдѣлать задачу невозможной и неопредѣленной, то на пересказѣ рѣшенія уже не слѣдуетъ останавливаться, довольствуясь краткимъ указаніемъ плана рѣшенія. Если послѣ рѣшенія хотимъ остановиться на повѣркѣ рѣшенія, то уже не слѣдуетъ долго останавливаться на разсказѣ о ходѣ рѣшенія и т. п.

Повтореніе дѣлается тогда, когда каждое упражненіе въ отдѣльности хорошо извѣстно дѣтямъ, и потому они могутъ быстро переходить отъ одного изъ нихъ къ другому.

Приводимъ примѣры перечисленныхъ работъ, чтобы уже не возвращаться къ объясненію ихъ.

Сперва приведемъ тѣ вопросы, которые слѣдуетъ предложить по поводу рѣшенія одной изъ разобранныхъ прежде задачъ, напримѣръ задачи о числѣ лѣтъ дѣда, отца и сына (см. выше), если мы хотимъ обратить вниманіе учащихся на то, по какого рода даннымъ отыскивалось каждое неизвѣстное, какъ получаемое при рѣшеніи какой либо изъ простыхъ задачъ, входящихъ въ составъ рѣшенія (частныхъ или вспомогательныхъ неизвѣстныхъ, какъ ихъ принято называть), такъ и требуемое задачей (главное неизвѣстное).

Вопросы должны предлагаться непремѣнно послѣ рѣшенія: въ противномъ случаѣ ученики ихъ не понимаютъ; дать отчетъ о томъ, что уже сдѣлано гораздо легче, и ученики могутъ исполнять такое требованіе. Въ задачѣ требуется узнать сколько лѣтъ, дѣду,

отцу и сыну *). Когда задача рѣшена, учитель спрашиваетъ: „по какимъ числамъ нашли вы лѣта отца“? Учащіеся или прямо говорятъ: „по лѣтамъ дѣда и тому, сколько лѣтъ отцу и дѣду было вмѣстѣ“, или, если дѣти не могутъ объяснить настолько подробно, называютъ просто числа, по которымъ были найдены годы отца (104 и 64); въ послѣднемъ случаѣ преподающій спрашиваетъ, что обозначало число 104, а также число 64 (первое—лѣта отца и дѣда вмѣстѣ, второе—лѣта одного дѣда); изъ этихъ двухъ отдѣльныхъ отвѣтовъ составляется одинъ, содержаніе котораго, очевидно, тождественно съ предположеннымъ съ самаго начала полнымъ отвѣтомъ. Составленіе изъ двухъ отвѣтовъ одного произойдетъ само собою, если мы велимъ кому-нибудь изъ учениковъ повторить все то, что говорилось о числахъ, по которымъ было найдено искомое число.

Число лѣтъ дѣда и отца вмѣстѣ было дано въ задачѣ, но число лѣтъ дѣда не было дано, продолжаетъ говорить учащій, по какимъ же числамъ оно въ свою очередь было найдено?

Отвѣты учениковъ идутъ тѣмъ же порядкомъ; потомъ разбирается, „были-ли даны эти числа въ задачѣ или нѣтъ, и по какимъ числамъ они опредѣлялись въ послѣднемъ случаѣ“.

Если каждый изъ отвѣтовъ будетъ записываться въ извѣстномъ порядкѣ на доскѣ, то всѣ записи составятъ собою изложеніе всего состава задачи, напримѣръ въ такой формѣ:

- Число лѣтъ отца.
  - Число лѣтъ отца и дѣда (104).
  - Число лѣтъ дѣда.
    - Двойное число лѣтъ дѣда.
      - Число лѣтъ дѣда и отца вмѣстѣ (104).
      - Разность лѣтъ дѣда и отца.
        - Число лѣтъ отца и сына (54).
        - Число лѣтъ дѣда и сына (78).
    - Отношеніе взятаго числа къ числу лѣтъ дѣда. (2).

Составленіе подобныхъ плановъ *послѣ* рѣшенія задачи легко дается учащимся. Если ученики умѣютъ очень хорошо составлять

---

*) Рѣшеніе выражается слѣдующими строками:

1) Дѣдъ старше отца на 78 г.—54 г.=24 г.

2) Двойное число лѣтъ дѣда составляетъ 104 г.+24 г.=128 л.

3) Дѣду было 128 л. : 2=64 г.

4) Отцу было 104 г.—64 г.=40 л.

5) Сыну было 54 г.—40 л.=14 л.

такіе планы и привыкли опредѣлять, по какимъ даннымъ можетъ быть найдено искомое число, то можно даже рѣшать задачи начиная отъ неизвѣстнаго и разсуждая о томъ, по какимъ даннымъ оно можетъ быть опредѣлено. Но упражненія въ такомъ пріемѣ рѣшенія задачъ не должны отнимать много времени, такъ какъ по существу *) онъ труденъ для начинающихъ и потому мало полезенъ: время, которое учащіеся должны потратить на его усвоеніе, не окупается приносимою имъ пользою, выгоднѣе потратить время на другія упражненія, стоящія въ болѣе тѣсной связи, по характеру требуемой имъ работы, съ общимъ направленіемъ курса, напримѣръ на пополненіе теоріи дѣйствій и чиселъ. Только въ отдѣльныхъ случаяхъ вопросы, предлагаемые отъ неизвѣстнаго, могутъ дѣйствительно помочь учащимся при рѣшеніи задачи, и то обыкновенно могутъ натолкнуть только на разъясненіе содержанія задачи, а не руководить всѣмъ ходомъ рѣшенія. Такъ напримѣръ, подобные вопросы были приведены мною выше, какъ наводящіе вопросы при рѣшеніи вопроса, во сколько времени кончатъ работу двое работниковъ, если извѣстно, во сколько времени каждый изъ нихъ въ отдѣльности можетъ кончить работу.

Изъ всего сказаннаго мною видно, что хорошій сборникъ ариѳметическихъ задачъ долженъ удовлетворить слѣдующимъ условіямъ: 1) дать матеріалъ для постепеннаго развитія навыка къ вычисленіямъ, т. е. задачи легко разбиваемыя на рядъ простыхъ, но требующія многихъ вычисленій; 2) дать задачи трудныя, заставляющія учащагося не только вычислять, но и думать надъ тѣмъ, какъ воспользоваться условіями; 3) задачи должны быть подобраны такъ, чтобы рѣшеніе предшествующихъ помогало пониманію дальнѣйшихъ, болѣе сложныхъ или болѣе трудныхъ; 4) въ сборникѣ должны быть даны указанія учителю, какъ найти тѣ задачи, которыя подготовляютъ ко взятой трудной задачѣ. Задачи на тройныя правила должны входить въ общую систему расположенія задачъ, не составляя отдѣльныхъ группъ. Я уже упоминалъ, что существующіе въ настоящее время сборники удовлетворяютъ обыкновенно

*) Матеріалы для упражненій въ аналитическомъ рѣшеніи вопросовъ занятія ариѳметикой (съ дѣтьми) дать не могутъ; подобный матеріалъ обильно дается геометріей и потому занятія ею очень удобны для пріученія къ анализу и рѣшенію вопросовъ исходя отъ неизвѣстнаго.

тѣмъ или другимъ, но далеко не всѣмъ поставленнымъ требованіямъ; удовлетворяющихъ 4-му условію совсѣмъ нѣтъ, 3-му условію всѣ существующіе сборники не удовлетворяютъ въ достаточной степени. О сборникѣ учителя Татаринова только упомянуто, т. ч. онъ составленъ подъ вліяніемъ настоящей книги.

Въ послѣднее время начинаетъ распространяться обычай помѣщать въ сборникахъ только численный отвѣтъ, безъ объясненія хода рѣшенія, а въ нѣкоторыхъ даже помѣщаются отвѣты лишь на немногія задачи или неполные отвѣты. Нельзя не сочуствовать распространенію этого обычая, и вотъ по какой причинѣ: либо ученикъ, подумавъ, можетъ рѣшить задачу, и тогда помощь только вредитъ ему, мѣшаетъ думать, соблазняетъ его прочесть готовое рѣшеніе, или онъ дѣйствительно не можетъ рѣшить задачи, а тогда слѣдуетъ, или вовсе не давать ее, или разобрать во время урока, заставивъ учащихся думать, но не запоминать готовое рѣшеніе. (Если учитель ищетъ объясненія рѣшенія, онъ долженъ искать его въ другой книгѣ, а не въ такомъ сборникѣ, который дается въ руки дѣтямъ). Я думаю, что для развитія въ учащихся привычки къ самостоятельному обдумыванію рѣшенія и умѣнья провѣрять себя, для внушенія твердости въ разсужденіяхъ, полезно давать отвѣты далеко не на всѣ задачи: учащіеся всегда ищутъ опоры въ отвѣтѣ и довольствуются полученіемъ требуемаго числа. Но давать *иногда* отвѣты, особенно на тѣ задачи, которыя рѣшаются дома, безъ помощи учителя, слѣдуетъ; въ противномъ случаѣ, мы слишкомъ много потребовали-бы отъ дѣтей, требовали-бы несвойственной имъ степени самостоятельности и тѣмъ напрасно утомляли бы ихъ. Но и на домъ предлагая рѣшить задачу полезно иногда не сообщать отвѣта.

Приведу еще примѣръ того, какимъ образомъ можно пользоваться задачами для постепенной выработки отвлеченныхъ понятій. Для примѣра выбираю разъясненіе понятій о разностномъ и кратномъ отношеніяхъ. Важное значеніе этихъ отношеній для ариѳметическихъ вычисленій само собою понятно, и я уже говорилъ, что знакомить съ ними учащихся на практическихъ примѣрахъ слѣдуетъ съ самаго начала занятій. Каждое отношеніе въ отдѣльности на практическихъ примѣрахъ безъ особеннаго труда понимается учащимися, но различеніе этихъ отношеній и усвоеніе

ихъ въ отвлеченной формѣ дается довольно трудно, представляетъ всегда главнѣйшее заттрудненіе для начинающихъ. Учащіеся долго смѣшиваютъ выраженія: „во сколько разъ“ больше (или меньше) и „на сколько“ больше одно число другаго, обыкновенно замѣняя во всѣхъ случаяхъ кратное отношеніе разностнымъ. Кажется иногда учителю, разъясняющему примѣрами понятіе о кратномъ отношеніи, что учащіеся вполнѣ поняли, въ чемъ дѣло: они вѣрно рѣшаютъ предлагаемые примѣры; я на слѣдующемъ-же урокѣ ученики опять замѣняютъ кратное отношеніе разностнымъ. Въ отчаяніе приходитъ учитель, но напрасно: дѣло только во времени. Учащіеся, приступая къ занятіямъ ариѳметикой, обыкновенно имѣютъ въ запасѣ въ значительной степени выработанное представленіе о разностномъ отношеніи, такъ какъ имъ приходилось встрѣчаться съ нимъ въ своей жизни до школы (приходилось, напримѣръ, сравнивать, у кого больше гостинцевъ, кто дальше кинулъ мячъ или палку, насколько дальше и т. п.), тогда какъ кратное отношеніе наблюдать не приходилось, да и само по себѣ понятіе о кратномъ отношеніи, какъ болѣе отвлеченномъ, значительно труднѣе. Побѣждать подобныя затрудненія (они встрѣчаются въ каждомъ предметѣ) должны время и упражненія: нужно чтобы дѣти привыкли къ новымъ понятіямъ. Я уже высказалъ убѣжденіе въ томъ, что для усвоенія всякихъ новыхъ понятій нужны не только объясненія и упражненія, но и просто *время;* оно какъ будто нужно для того, чтобы вновь пріобрѣтеныя понятія успѣли крѣпко засѣсть въ умѣ; иногда даже то, что кажется довольно труднымъ и сбивчивымъ съ перваго раза, черезъ нѣсколько времени становится понятнымъ безъ новыхъ объясненій со стороны учителя, или вновь пройденное и понятно ученикамъ, но не твердо держится въ памяти, а потомъ какъ будто само собою гораздо лучше запомнится. Оттого-то и нельзя никогда давать много матеріала заразъ, а необходимо раздѣлять его на небольшія части; умъ нашъ не можетъ сразу охватить большое количество новыхъ свѣдѣній, даже и въ томъ случаѣ, если каждое изъ нихъ само по себѣ очень просто.

Чтобы выяснить учащимся разностное и кратное отношенія, слѣдуетъ, вопервыхъ, дать значительное количество фактовъ для *наблюденія;* вовторыхъ, знакомить съ отношеніями первоначально на прямыхъ дѣйствіяхъ, а не на обратныхъ, т. е. чтобы отношенія

входили въ число данныхъ, но не искомыхъ (данное множно наблюдать); въ третьихъ должно выбирать примѣры по способу выраженія условій близко подходящіе къ обычной формѣ выраженія этихъ отношеній, чтобы облегчить запоминаніе послѣднихъ; въ четвертыхъ—заставлять учащихся почаще сравнивать эти отношенія, примѣняя ихъ къ однимъ и тѣмъ-же числамъ, т. е. почаще предлагать рядомъ такія упражненія, чтобы въ одномъ играло роль разностное отношеніе, а въ другомъ—кратное отношеніе между тѣми же числами. Замѣчу еще, что, говоря о необходимости дать время освоиться съ этими понятіями, я считаю точно также необходимымъ посвящать особое, отдѣльное время на подобныя упражненія, даже указывая на это учащимся, потому что необходимо обратить на нихъ особенное вниманіе учащихся, показать ихъ важность. Учитель можетъ, напримѣръ, часть урока посвятить разбору задачъ или упражненіямъ въ вычисленіи, а потомъ перейти къ примѣрамъ на отношенія, сдѣлавъ перерывъ. Всѣ объясненія слѣдуетъ, конечно, относить къ задачамъ, а не къ отвлеченнымъ примѣрамъ, а первые примѣры, *непремѣнно* пояснять наглядными пособіями.

Для разъясненія разностнаго и кратнаго отношеній, могутъ служить примѣры въ родѣ слѣдующихъ. Въ одной тетради ученикъ исписалъ 3 страницы, въ другой 2-мя больше; сколько написано во второй тетради? Дѣти два раза ходили за ягодами и каждый разъ приносили по 3 карзинки; сколько ягодъ они набрали? Рѣшить эти и подобные имъ примѣры, которые должны быть предложены вслѣдъ за ними, дѣти, вѣроятно, не затруднятся. Если-же они и затруднятся, учитель легко можетъ заставить найти результатъ наглядно: взявъ тетрадь и отсчитавъ три страницы, велитъ указать тѣ страницы, которыя будутъ исписаны въ другой, и сосчитать ихъ. Послѣ счета страницъ непосредственно въ тетради, слѣдуетъ заставить учащихся показать на классныхъ счетахъ, сколько было исписанныхъ страницъ въ одной тетради, сколько будетъ написано въ другой и какъ получилось это послѣднее число при счетѣ (цѣль упражненія: заставить переносить счетъ съ однихъ предметовъ на другіе, чтобы потомъ легче было переносить счетъ съ дѣйствительныхъ предметовъ на воображаемые); наконецъ вести прямо отвлеченный счетъ. Въ случаѣ затрудненія при рѣшеніи другой задачи учитель можетъ заставить учащихся пока-

зать на какихъ-нибудь предметахъ, хотя на тѣхъ-же счетахъ или карандашахъ, перьяхъ, сколько корзинокъ ягодъ было собрано въ первый разъ, сколько во второй и сосчитать, сколько набралось всего. Итакъ, результаты найдены. Тогда учащій предлагаетъ для повторенія обратные вопросы, съ цѣлью обратить вниманіе учащихся на тѣ отношенія, которыя были указаны въ задачахъ. Онъ спрашиваетъ учащихся: сколько-же лишнихъ страницъ нужно было написать во второй тетради? насколько больше будетъ написанныхъ въ ней страницъ? сколько всего будетъ исписанныхъ страницъ во второй тетради? А если-бы нужно было къ одному уроку рѣшить три задачи, а къ другому двумя больше, сколько пришлось-бы рѣшить задачъ ко второму уроку? сколько лишнихъ? Насколько-же всегда 5 больше 3? По поводу второй задачи предлагаются, примѣрно, слѣдующіе вопросы: сколько разъ приносили по 3 карзины? сколько всего получилось? Если-бы носили не корзинки, а ведерки, сколько вышло-бы ведерокъ? Значитъ, взявъ два раза по три, сколько всегда получимъ? а прибавивъ къ тремъ двѣ лишнихъ? Подобными вопросами на первый разъ слѣдуетъ и ограничиться, но предложить ихъ по поводу 2 или 3 паръ примѣровъ на оба отношенія съ одними и тѣми-же числами.

Черезъ нѣсколько времени (пропустивъ 2—4 урока) слѣдуетъ опять остановиться на подобныхъ-же примѣрахъ; когда ученики не будутъ затруднятся ими—идти дальше.

При рѣшеніи первыхъ подобныхъ примѣровъ слѣдуетъ *непремѣнно* употреблять наглядныя пособія, хотя-бы ученики и могли рѣшить каждый изъ нихъ; въ послѣднемъ случаѣ учитель довольствуется тѣмъ, что *послѣ* рѣшенія примѣра заставляетъ учащихся показать на какихъ-нибудь преметахъ, что они дѣлали съ числами; въ случаѣ-же затрудненія наглядныя пособія употребляются и *при* разъясненіи самого вопроса.

Въ послѣдующихъ примѣрахъ отношенія должны указываться въ задачѣ въ отвлеченной формѣ. Измѣняемъ предыдущіе примѣры, чтобы показать особенность новыхъ: 1) въ одной тетради исписано 3 страницы, а въ другой *на* 2 больше; 2) изъ лѣсу дѣти принесли 3 корзины грибовъ, а наканунѣ они принесли *въ два раза* больше; сколько корзинъ собрали наканунѣ?

Важную роль играетъ самая форма вопросовъ, такъ какъ уча-

щіеся должны привыкнуть различать два выраженія: *на сколько* и *во сколько разъ* больше или меньше одно число другого, чтобы пріучить къ правильному пониманію этихъ выраженій, слѣдуетъ при наведеніи и при повторительныхъ вопросахъ постоянно заботиться о сближеніи выраженій: *на сколько*—съ словами: „сколько лишнихъ“, *во сколько разъ*—съ словами: „сколько разъ надо повторить данное число“. Для той-же цѣли очень полезно выбирать примѣры такіе, въ которыхъ необходимость повторенія числа или прибавки къ нему ясно выражалось бы условіями. Во взятомъ примѣрѣ (первая форма) дѣти приносятъ столько разъ по 3 корзины, сколько разъ ходили въ лѣсъ; повтореніе числа 3 очевидно. Далѣе примѣры становятся болѣе отвлеченными.

Послѣдующія упражненія относятся къ обратнымъ дѣйствіямъ, т. е. въ нихъ отношеніе чиселъ не дано, а представляетъ искомое. Напримѣръ предлагаются вопросы: на лошади крестьянинъ ѣхалъ до города 2 часа; въ другой разъ онъ пришелъ пѣшкомъ и шелъ до города 6 часовъ; на сколько часовъ шелъ онъ дольше, чѣмъ ѣхалъ? (При затрудненіи: сколько лишнихъ часовъ шелъ)? Другой примѣрный вопросъ: фунтъ овсяной крупы стоитъ 2 коп., а гречневой 6 коп.; во сколько разъ вторая дороже первой? (Въ случаѣ затрудненія: сколько разъ надо повторить 2, чтобы получить 6)? Нѣсколько труднѣе ученикамъ рѣшать такіе вопросы, если требуется найти втораго рода отношеніе между тѣми же данными. (Если первый вопросъ измѣнить послѣ того какъ онъ будетъ рѣшенъ, такъ: во сколько разъ дольше пришлось ему идти, чѣмъ ѣхать)? Въ первыхъ упражненіяхъ каждаго рода лучше предлагать вопросы сперва на разностное отношеніе, потомъ на кратное, а въ послѣдующихъ слѣдуетъ поступать и такъ, и наоборотъ.

Когда ученики станутъ только изрѣдка смѣшивать выраженія *на сколько* и *во сколько разъ,* слѣдуетъ давать большія числа, перемѣнять ихъ величину и наконецъ упражнять въ вычисленіи отвлеченныхъ примѣровъ на эти отношенія. Все это должно быть сдѣлано не позже, какъ въ первые два года обученія, а луше если учащіеся привыкнутъ различать отношенія въ продолженіи первагоже года занятій.

Когда учащіеся привыкнутъ различать отношенія при рѣшеніи такихъ вопросовъ, все содержаніе которыхъ составляютъ эти отношенія, слѣдуетъ почаще вводить отношенія въ болѣе сложныя задачи.

Заканчиваю главу указаніемъ на пріемъ постепеннаго перехода къ повѣркѣ найденнаго рѣшенія задачи. Пріучать дѣтей къ повѣркѣ задачъ необходимо, чтобы заставить ихъ дѣйствовать сознательно, слѣдить за своей работой и полагаться не на полученіе числа, даннаго въ „рѣшеніи", а на ясное пониманіе условій задачи и хода ея рѣшенія, однимъ словомъ—для пріученія къ самостоятельной работѣ.

Вообще къ серьезной повѣркѣ найденныхъ рѣшеній пріучить учащихся нелегко. Если имъ предлагается повѣрить, вѣрно-ли рѣшена задача, то они дѣлаютъ, естественно, то, что имъ знакомо было раньше, т. е. повѣряютъ дѣйствія, а не то, удовлетворяетъ-ли рѣшеніе условіямъ задачи (согласно-ли съ условіями). Чтобы познакомить съ повѣркой послѣдняго рода, нужно дѣйствовать, какъ и всегда, не объясненіями, чего мы хотимъ, а примѣрами, т. е. предложеніемъ такихъ задачъ, при рѣшеніи которыхъ повѣрить, удовлетворяетъ-ли найденное число поставленнымъ требованіямъ, очень легко, такъ чтобы учащіеся сейчасъ-же могли понять, какъ опредѣлить, согласно-ли рѣшеніе съ условіями, а между тѣмъ самый ходъ повѣрки совершенно отличался бы отъ хода рѣшенія задачи и притомъ потребность въ повѣркѣ чувствовалась-бы учениками, т. е. задача сама по себѣ не казалась-бы имъ слишкомъ легкою, которую и повѣрять не стоитъ.

Наиболѣе удобны для такой цѣли задачи *съ двумя искомыми*, тѣмъ болѣе, что нерѣдко съ одинаковою легкостью можно произвести повѣрку, согласно-ли найдено рѣшеніе съ каждымъ изъ условій. Послѣ рѣшенія, напримѣръ, задачи о цѣнѣ 10 ябл. и 10 ап., разобранной въ 4-й главѣ, легко обратить вниманіе учащихся на пріемъ повѣрки; стоитъ только спросить ихъ: сколько-же, выходитъ, долженъ заплатить первый покупатель за 10 ап. и 15 яблокъ, если цѣна 10 ябл. 40 коп., а 10 ап. 60 коп.? Второй сколько долженъ заплатить? А какъ было сказано въ задачѣ, по сколько они заплатили? Если-же по ошибкѣ мы считали, что 40 коп. стоятъ не 10 ябл., а 10 ап. и наоборотъ, сколько долженъ былъ-бы тогда заплатить первый покупатель? Согласно-ли будетъ такое рѣшеніе съ условіями задачи? Вотъ другая задача (на классной доскѣ полезно для этой цѣли сохранить рѣшеніе хотя одной, а еще лучше—нѣсколькихъ разобранныхъ задачъ,

чтобы остановиться на повѣркѣ нѣсколькихъ задачъ сразу, а не одной только: сравненіе выясняетъ пріемъ повѣрки), какъ опредѣлить, согласно-ли рѣшеніе ея съ условіями? Для большей опредѣленности предположимъ, что другая задача, записанная на доскѣ,— задача о числѣ лѣтъ отца сына его и дѣда (см. выше). Преподаватель, указывая на ея рѣшеніе, говоритъ: мы рѣшили и эту задачу, согласно-ли рѣшеніе ея съ условіями? (Въ случаѣ затрудненія учащихся прибавляется: какія числа нашли при рѣшеніи задачи? сколько (по условію) лѣтъ отцу и сыну вмѣстѣ? выходитъ-ли такъ по рѣшенію? а еще какія были условія? удовлетворяетъ-ли этимъ условіямъ рѣшеніе задачи)? Обративъ такимъ образомъ вниманіе учащихся на повѣрку найденныхъ рѣшеній, указавъ на нѣсколькихъ примѣрахъ, въ чемъ состоитъ эта повѣрка, непремѣнно слѣдуетъ *объяснить пріемъ* повѣрки и указать на его общность. Дѣлается это, напримѣръ, такъ: мы рѣшили нѣсколько задачъ; чтобы узнать, вѣрно-ли мы рѣшали ихъ, надо было посмотрѣть, согласны-ли найденныя числа съ условіями; при повѣркѣ должны получаться тѣ-же числа, какія даны въ задачѣ; если получаются другія—задача рѣшена не вѣрно. Пока еще нельзя объяснить учащимся, какъ опредѣлить, отчего происходитъ ошибка: отъ ошибочнаго пониманія задачи, или отъ ошибочности вычисленій; говорить объ этомъ можно тогда, когда учащіеся привыкнутъ къ повѣркѣ различнаго рода задачъ; практика покажетъ имъ, что повѣрка рѣшенія представляетъ собою рѣшеніе новой задачи, часто рѣзко отличающейся отъ данной, а не простую повѣрку вычисленій, т. е. выполненіе дѣйствій обратныхъ тѣмъ, которыя дѣлались при рѣшеніи задачи.

Познакомивъ съ пріемами повѣрки рѣшенія, слѣдуетъ постоянно упражнять въ повѣркѣ найденныхъ рѣшеній, но отдѣляя повѣрку отъ самаго рѣшенія, т. е. предлагая сдѣлать ее только тогда, когда рѣшеніе задачи уже вполнѣ усвоено учащимися. Однако-же повѣрять *каждую* изъ рѣшаемыхъ задачъ вовсе нѣтъ надобности: это надоѣстъ ученикамъ и потому дурно на нихъ повліяетъ; достаточно, если каждую недѣлю будетъ провѣряться рѣшеніе одной изъ 5—10 разобранныхъ задачъ. Рѣшенія короткихъ и въ тоже время легкихъ задачъ повѣрять не слѣдуетъ: сомнѣній въ правильности ихъ рѣшеній у учениковъ не возбуждается.

---

# ГЛАВА ПЯТАЯ.

## О теоретическихъ выводахъ.

Въ первой части „Руководства“ мною было высказано, когда шла рѣчь о значеніи теоріи ариѳметики, что теоретическія объясненія, въ той или другой формѣ, болѣе или менѣе отвлеченной, въ болѣе или менѣе широкихъ размѣрахъ, но непремѣнно должны даваться, что усвоеніе теоріи должно составлять цѣль занятій ариѳметикой, такъ какъ она-то и дѣйствуетъ развивающимъ образомъ на учащихся. Если въ начальной школѣ нельзя (по недостатку времени и развитію учащихся) познакомить со всей теоріей послѣдовательно изложенной, то во всякомъ случаѣ слѣдуетъ сдѣлать хотя отдѣльные теоретическіе выводы, поясняющіе тѣ упражненія, которыя доступны и знакомы учащимся.

Теорія имѣетъ, говоримъ мы, наиболѣе важное значеніе. Умѣнье вычислять, разумѣется, необходимо безусловно; ученикъ долженъ отлично владѣть вычисленіями, но только потому, что безъ этого нельзя ни хорошо понять теорію, ни воспользоваться своими знаніями, а цѣль обученія—развить учащагося и научить работать (пріобрѣтать новыя знанія и пользоваться уже пріобрѣтенными). Задачи имѣютъ и самостоятельное значеніе въ курсѣ, мы указали на это, но и онѣ будутъ полезны только тогда, когда навыкъ въ рѣшеніи ихъ будетъ соединяться съ пониманіемъ теоріи предмета; въ противномъ случаѣ образовательное значеніе ихъ очень сильно пострадаетъ. Мы говорили даже болѣе: не только надо рѣшать задачи, но надо объяснять и составъ ихъ, пріемы ихъ рѣшенія, пріемы разбора условій и повѣрки рѣшеній и т. д., т. е. такъ сказать *теорію* состава и рѣшенія задачъ.

Придавая такое важное значеніе теоріи, я и хочу теперь остановиться на указаніи нѣкоторыхъ общихъ пріемовъ работы при теоретическихъ объясненіяхъ.

Я говорилъ уже, что при начальномъ обученіи ариѳметикѣ всякія знанія пріобрѣтаются путемъ практическимъ, посредствомъ рѣшенія и разбора задачъ; когда учащіеся уже не будутъ затрудняться извѣстнаго рода упражненіями — слѣдуетъ сдѣлать выводъ (обобщеніе) изъ этихъ упражненій, т. е. дать теоретиче-

ское объясненіе. Было указано также, въ какомъ порядкѣ выгоднѣе, по нашему мнѣнію, разъяснять важнѣйшія теоретическія понятія. Отдѣльные выводы должны быть опять сопоставляемы и связываемы между собою, т. е. должны быть въ свою очередь обобщаемы... Такимъ образомъ послѣ 4—6 лѣтъ занятій можно дойти до выработки законченной и разработанной въ подробностяхъ теоріи ариѳметики. Напомню еще, что по общему плану курса, въ то время, когда дѣлается одно обобщеніе, идутъ практическія упражненія, подготовляющія учащихся къ слѣдующему обобщенію (объясняются дѣйствія надъ цѣлыми числами, а въ то-же время идутъ задачи, требующія выполненія простѣйшихъ вычисленій съ дробными числами и т. д.).

Слѣдовательно, при начальномъ обученіи первый шагъ къ обобщенію—твердое практическое знаніе того, что хотимъ объяснять. Но твердое практическое знаніе, вообще говоря, можетъ быть пріобрѣтено лишь послѣ цѣлаго ряда упражненій, по возможности разнообразныхъ: иначе будетъ заучиваніе упражненій, а не усвоеніе ихъ. Начну съ указаній на то, какъ дѣлаются отдѣльные выводы.

Чтобы сдѣлать переходъ отъ практическихъ упражненій къ выводу, слѣдуетъ прежде всего обратить вниманіе учащихся на важнѣйшія изъ этихъ упражненій; съ этою цѣлью, непосредственно передъ тѣмъ, какъ дѣлать выводъ, слѣдуетъ предложить учащимся вновь такія упражненія, которыя всего ближе и точнѣе выражаютъ мысль будущаго вывода, т. е. объясненіе которыхъ представляетъ прямое примѣненіе общаго опредѣленія къ частному случаю. Я говорю *вновь* предложить, потому что упражненія, служащія основаніемъ для вывода, должны быть хорошо извѣстны ученикамъ, чтобы мысль ихъ могла сосредоточиться на новой работѣ—отвлеченіи.

Продѣлавъ нѣсколько примѣровъ и записавъ ихъ на доскѣ, чтобы въ случаѣ надобности удобно было указать на нихъ, преподающій переходитъ прямо къ выводу; на разборѣ взятыхъ примѣровъ уже не слѣдуетъ останавливаться, такъ какъ это удлинило-бы выводъ и потому сильно затруднило-бы его выполненіе; а упражненія эти извѣстны, поэтому въ разборѣ ихъ и нѣтъ надобности.

Обыкновенно говорятъ, что выводъ долженъ быть сдѣланъ самимъ ученикомъ, но это возможно лишь въ рѣдкихъ случаяхъ: преподающій долженъ натолкнуть ученика на обобщеніе своими вопросами, а если онъ направляетъ мысль ученика, указываетъ, куда надо идти, то, значитъ, отчасти самъ дѣлаетъ требуемый выводъ. Я нахожу, что въ большинствѣ случаевъ даже прямо слѣдуетъ останавливать тѣхъ учениковъ, которыя уклоняются далеко въ сторону или впадаютъ въ крупную ошибку: если учащій не остановитъ ихъ, то при сколько-нибудь сложныхъ выводахъ уклоненія въ сторону запутаютъ дѣтей, и они потеряютъ изъ виду нить разсужденія. Останавливать слѣдуетъ прямо говоря: „нѣтъ, не такъ". Если-же ученикъ сдѣлалъ небольшую ошибку, то отвѣтомъ его надо воспользоваться, разъяснивъ, въ чемъ заключается ошибка. Искусство преподающаго въ томъ и заключается, чтобы опредѣлить, когда возможно воспользоваться отвѣтомъ, когда нельзя и слѣдуетъ остановить ученика; никакихъ опредѣленныхъ указаній въ этомъ случаѣ дать нельзя.

Неопытные учителя весьма часто даютъ ученикамъ вполнѣ высказывать свои предложенія, не смотря на все ихъ разнообразіе, а потомъ не могутъ выбраться изъ противорѣчій, бываютъ вынуждены объявить, что „все не такъ", и перейти къ изложенію объясненія, или-же отвергаютъ всякій отвѣтъ, если только онъ не вполнѣ вѣренъ, и такимъ образомъ упускаютъ возможность заставить ученика подумать и дойти до вѣрнаго заключенія. Въ томъ и другомъ случаѣ напрасно теряется время.

Напомню здѣсь еще разъ, что выводы изъ примѣровъ должны дѣлаться въ первые годы обученія, но въ послѣдующіе годы слѣдуетъ постепенно пріучать къ усвоенію объясненій, изложенныхъ самимъ учителемъ и къ чтенію книги—учебника, что цѣль обученія—довести учащагося до умѣнья работать безъ наведенія, безъ помощи другихъ, насколько будетъ возможно.

Выводъ дѣлается при помощи наводящихъ вопросовъ учителя. Успѣхъ зависитъ въ значительной степени отъ правильной постановки вопроса. Если предложенные примѣры близко подходятъ къ тому общему заключенію (обобщенію), которое надо сдѣлать, то достаточно потребовать только „общаго заключенія", т. е. спросить, что *во всѣхъ* приведенныхъ примѣрахъ дѣлалось, чтобы уче-

ники сдѣлали выводъ. Сами они не дѣлаютъ такого вывода потому, что не привыкли дѣлать ихъ, въ большинствѣ случаевъ не сознаютъ еще ихъ значенія и не стремятся къ нимъ. Слѣдуетъ замѣтить здѣсь, что учащіеся очень склонны ошибочно принимать отдѣльные частные случаи за общіе, но обыкновенно не дѣлаютъ правильныхъ выводовъ, вытекающихъ изъ сравненія нѣсколькихъ примѣровъ, такъ какъ не привыкли и не умѣютъ сравнивать.

Когда выводъ сдѣланъ и состоялось опредѣленіе выработаннаго понятія, учащій долженъ повторить его самъ (говоря медленно и отчетливо), чтобы такимъ образомъ выразить свое одобреніе сдѣланному заключенію, признать его правильнымъ и еще разъ обратить на него вниманіе учащихся. Послѣ того должно быть дано названіе опредѣленному понятію (о дѣйствіи надъ числами, о родѣ разсмотрѣнныхъ чиселъ или о свойствѣ ихъ и т. п.). Часто приходится наблюдать, какъ учащимъ хочется добиться, чтобы ученики сами догадались-бы о *названіи* того или другого понятія — совершенно безполезная трата силъ и времени: названія даются въ значительной степени произвольно, поэтому *выводить* ихъ нельзя, и если даже дѣти угадаютъ названіе, пользы не будетъ: это будетъ догадка, а не выводъ.

Сдѣланный выводъ долженъ быть сейчасъ-же поясненъ и закрѣпленъ приложеніемъ его къ новымъ примѣрамъ. Притомъ отъ учениковъ слѣдуетъ требовать трояка̀го рода работы: 1) объясненія, почему къ новому примѣру относится данное опредѣленіе, 2) подысканія новыхъ примѣровъ, подходящихъ подъ данное опредѣленіе, наконецъ 3) рѣшенія, относится-ли ко вновь предлагаемому примѣру данный выводъ или не относится, и объясненія, почему такъ или иначе рѣшаютъ вопросъ. Безъ такихъ дополнительныхъ упражненій ученики не въ состояніи хорошо усвоить данныя объясненія. Упражненія эти нужны и для учителя: исполненіе ихъ учениками покажетъ ему, насколько послѣдніе поняли объясненія. Подобныя упражненія необходимо предлагать не только тотчасъ вслѣдъ за выводомъ, но и впослѣдствіи, такъ какъ въ противномъ случаѣ скоро забудется пройденное. Ихъ слѣдуетъ предлагать тотчасъ послѣ того, какъ сдѣланъ выводъ, потому что подобными упражненіями лучше всего разъясняются сообщаемыя свѣдѣнія.

Большею частію можно бываетъ въ одинъ и тотъ же урокъ за-

кончить выводъ и примѣнить его къ примѣрамъ; если-же, по сложности вывода, этого нельзя сдѣлать, то слѣдуетъ разбить выводъ на рядъ отдѣльныхъ выводовъ, изъ которыхъ потомъ дѣлается окончательный; эти частные выводы составляютъ тогда содержаніе отдѣльныхъ уроковъ. На такіе послѣдовательные выводы не слѣдуетъ брать болѣе 2—3 уроковъ подрядъ, такъ какъ въ противномъ случаѣ ученики затрудняются усвоеніемъ быстро слѣдующихъ одного за другимъ выводовъ, смѣшиваютъ ихъ и кромѣ того утомляются однообразіемъ работы.

До сихъ поръ я говорилъ только о томъ, какъ дѣлаются отдѣльные выводы. Они должны быть снова объединяемы, чтобы постепенно вырабатывалась теорія предмета. Но прежде чѣмъ перейти къ замѣчаніямъ относительно выработки дальнѣйшихъ обобщеній, покажу на примѣрахъ, какъ дѣлаются отдѣльные выводы.

Въ началѣ книги я говорилъ, что первымъ крупнымъ обобщеніемъ должно быть составленіе понятій (слѣдовательно и выводъ опредѣленій) о дѣйствіяхъ. Время опредѣлить дѣйствія наступаетъ тогда, когда ученики уже могутъ выполнять ихъ надъ небольшими числами, могутъ почти безошибочно опредѣлить, что надо сдѣлать съ данными числами, и записать вычисленіе. (Названія дѣйствій имъ не сообщаются; дѣти должны сказать, что данныя числа надо соединить, или одно число повторить нѣсколько разъ, или узнать сколько разъ одно число содержится въ другомъ и т. п.).

Предполагая остановиться на опредѣленіи сложенія, напримѣръ, учитель начинаетъ урокъ предложеніемъ нѣсколькихъ упражненій, въ которыхъ встрѣчается сложеніе; всего лучше, если только одно сложеніе и входитъ. Такъ какъ весь курсъ (въ предлагаемомъ мною планѣ) опирается на разборѣ задачъ, вызывающихъ потребность въ ариѳметическихъ вычисленіяхъ, а для вывода лучше всего предложить такія-же упражненія, какъ и дѣлавшіяся прежде, то и для перехода къ опредѣленію слѣдуетъ также предложить *задачи*, требующія производства сложенія, а не отвлеченные примѣры. На задачахъ гораздо яснѣе видна цѣль вычисленія и объясненіе ихъ рѣшенія *очень близко подходитъ къ опредѣленію дѣйствія,* что и поможетъ ученику сдѣлать выводъ.

Выводъ будетъ сдѣланъ правильно только тогда, когда будетъ опираться на *нѣсколько* различныхъ случаевъ; если къ опредѣле-

нію будетъ сдѣланъ переходъ послѣ разбора одного только случая, то этимъ учащимся (особенно если такой пріемъ будетъ повторяться довольно часто) будетъ сообщаться привычка къ неправильнымъ выводамъ, къ принятію частныхъ, отдѣльныхъ случаевъ за общіе. Если даже въ дѣйствительности былъ-бы полученъ правильный выводъ, благодаря тому, что разсмотрѣнный частный случай совпадалъ бы съ общимъ, то всетаки *пріемъ* вывода остается совершенно неправильнымъ, способнымъ сообщить вредную привычку. Однако задачи должны быть просты по содержанію, чтобы вниманіе ученика сосредоточилось на вычисленіи.

Положимъ, напримѣръ, даны будутъ задачи: 1) крестьянинъ продалъ сѣна на 28 руб., овса на 47 руб. и ржи на 69 руб.; сколько онъ получилъ за все? 2) мальчику было 8 лѣтъ когда онъ поступилъ въ школу; съ тѣхъ поръ прошло три года; сколько теперь ему лѣтъ? 3) взвѣшивая товаръ лавочникъ поставилъ на вѣсы гирю въ 10 ф., а потомъ долженъ былъ поставить еще въ 2 ф.; сколько вѣситъ товаръ? и т. п.

Задачи эти, конечно, быстро будутъ рѣшены учениками (3—4 примѣровъ вполнѣ достаточно); рѣшенія ихъ будутъ записаны на доскѣ, но безъ всякихъ объясненій (напр.: 28 р.+47 р.+69 р.= 144 р.; 8 р.+3 р.=11 р.; 10 ф.+2 ф.=12 ф.).

До сихъ поръ шло объясненіе рѣшеній отдѣльныхъ задачъ. Выводъ опредѣленія дѣйствія состоится, если ученики замѣтятъ, что *во всѣхъ приведенныхъ задачахъ дѣлалось вычисленіе одного и того-же рода* и укажутъ, что именно дѣлалось во всѣхъ случаяхъ. Поэтому-то и вопросъ долженъ быть направленъ въ эту сторону. Никакъ не слѣдуетъ ставить вопроса о томъ, *какъ* дѣлалось вычисленіе; цѣль работы совершенно иная: надо опредѣлить, *что* дѣлалось съ числами и слѣдуетъ внушить мысль о неизмѣнности цѣли вычисленія, а слѣдовательно и дѣйствія, *какимъ-бы образомъ мы ни производили вычисленіе.*

Итакъ, учитель долженъ направить учащихся на сопоставленіе записанныхъ рѣшеній задачъ и опредѣленіе дѣйствія. Съ этою цѣлью учитель сперва заставляетъ повторить объясненія: вы записали здѣсь рѣшенія нѣсколькихъ задачъ; повторите коротко, что вы дѣлали съ числами въ первой задачѣ, второй, третьей (Отвѣты, въ зависимости отъ формы выраженія условій задачъ, будутъ вѣ-

роятно очень близки къ слѣдующимъ: въ первой задачѣ 28 руб., 47 руб. и 69 руб. сложили (соединили) вмѣстѣ; во второй задачѣ къ 8 годамъ надо было прибавить 3 года; въ третьей задачѣ надо было увеличить 10 ф. на 2 ф. *). Тогда учитель говоритъ: въ одной задачѣ вы сложили вмѣстѣ всѣ числа, во второй къ одному числу прибавили другое, въ третьей увеличили 10 ф. на 2 ф. Отчего же во всѣхъ случаяхъ поставленъ одинаковый знакъ? **) Какъ же сказать про всѣ случаи разомъ, что мы дѣлали съ данными числами? Этимъ вопросомъ учитель требуетъ указанія общаго признака всѣхъ разсмотрѣнныхъ случаевъ, т. е. обобщенія. Если ученики затруднятся, то надо имъ помочь наводящими вопросами. Помощь состоитъ въ томъ, что посредствомъ вопросовъ обращается вниманіе ученика на одинъ изъ разсмотрѣнныхъ случаевъ, опредѣляется подробно, что дѣлалось въ этомъ частномъ случаѣ, потомъ сравнивается второе вычисленіе съ первымъ; это сравненіе и помогаетъ замѣтить общіе признаки разсмотрѣнныхъ случаевъ (одобреніе учителя, признаніе правильности сравненія или непринятія его руководитъ работой); послѣ того остается разсмотрѣть, можно ли примѣнить выведенное заключеніе къ остальнымъ случаямъ. Такимъ образомъ, желая навести учениковъ на опредѣленіе того или другаго вычисленія, преподающій заставляетъ остановиться на частныхъ случаяхъ, опредѣлить, что дѣлается въ каждомъ изъ нихъ и уже изъ этихъ частныхъ опредѣленій сдѣлать выводъ. Такимъ путемъ идетъ наведеніе во всѣхъ случаяхъ, когда нужно дойти до опредѣленія.

Если учащіеся не смогутъ понять, что во всѣхъ предложенныхъ задачахъ дѣлалось одно и тоже дѣйствіе—сложеніе, то (согласно приведеннымъ сейчасъ указаніямъ) учащій долженъ остановиться на разборѣ отдѣльныхъ задачъ. Положимъ, онъ беретъ послѣднюю

---

*) Чтобы получились подобные отвѣты, необходимо при предварительныхъ практическихъ упражненіяхъ пріучать дѣтей, въ случаѣ требованія объясненія рѣшеній задачъ, всегда говорить о томъ, что именно дѣлаютъ они съ числами, а не только о томъ, какое число отыскиваютъ. Если же требуется лишь разсказъ о ходѣ рѣшенія задачи, то достаточно указывать только то, какія числа находимъ при рѣшеніи задачи.

**) Въ этомъ случаѣ внѣшній признакъ (одинаковость знака) помогаетъ обобщенію.

задачу. Что вы узнавали въ этой задачѣ, спрашиваетъ онъ учениковъ, указывая на записанное рѣшеніе 3-й задачи? (Узнавали, сколько вѣситъ товаръ). У васъ получилось 12 ф.; изъ какихъ же данныхъ чиселъ получилось это число 12 ф.? Какъ оно получилось? Что дѣлали съ данными числами во второй задачѣ? Чѣмъ же похоже рѣшеніе этой задачи на рѣшеніе предыдущей. Можно-ли сказать, что и третья задача рѣшается такимъ же образомъ? (или: можно ли сказать, что и въ третьей задачѣ тоже самое дѣлается съ данными числами?) Почему такъ думаете? Какъ же сказать, что дѣлается съ данными числами во всѣхъ разсмотрѣнныхъ задачахъ? (Отвѣтъ: во всѣхъ задачахъ надо одно число прибавить къ другому, соединить данныя числа въ одно и т. п.). Наиболѣе удобное выраженіе цѣли дѣйствія и принимается учителемъ и потомъ высказывается имъ самимъ еще разъ въ правильной редакціи.

Можно спрашивать нѣсколько иначе: не говоря о томъ, какой получился результатъ и изъ какихъ чиселъ составилось искомое, прямо можно спрашивать, что дѣлали съ данными числами. Я предлагаю сперва поставить вопросъ объ окончательномъ результатѣ вычисленія и отъ него уже перейти къ разбору того, изъ какихъ чиселъ и какимъ образомъ онъ полученъ, чтобы этимъ направленіемъ вопросовъ пріучать учащихся обращаться къ анализу вопроса въ случаѣ затрудненія.

Я думаю, понятіе о сложеніи настолько просто, что наводить учениковъ не придется, и даже считаю, что необходимость помочь учащимся при выводѣ опредѣленія такого простаго понятія, какъ понятіе о сложеніи, показываетъ преждевременность предложенія подобной работы, или ужь вопросъ поставленъ очень неловко. Вообще преподающимъ слѣдуетъ стремиться къ тому, чтобы поменьше *наводить* учащихся, чтобы въ большинствѣ случаевъ достаточно было потребовать отъ ученика той или другой работы, а выполнить ее онъ могъ бы самъ. Наведеніе полезно лишь въ труднѣйшихъ случаяхъ, въ которыхъ нужно показать, какъ слѣдуетъ работать, когда ученикъ, предоставленный самому себѣ, долженъ былъ бы слишкомъ долго трудиться или вовсе не могъ бы достигнуть цѣли. Предлагать же такую трудную работу бываетъ нужно какъ для законченности и полноты курса, такъ и для подъема

энергіи учащихся. Значеніе подобныхъ работъ такое же, какъ и трудныхъ задачъ, о которыхъ говорилось въ четвертой главѣ. Учащіе нерѣдко увлекаются наводящими вопросами и мѣшаютъ дѣтямъ работать, не даютъ имъ шагу ступить свободно, нерѣдко придумываютъ множество ухищреній, которыя однако мало приносятъ пользы. (Лѣтъ двадцать пять тому назадъ совсѣмъ не заботились о помощи учащимся). Взамѣнъ наведенія должно дать тщательно подобранный матеріалъ, который давалъ бы дѣтямъ возможность замѣтить отличительныя черты выполняемыхъ вычисленій, да почаще требовать отчета въ работѣ и объясненій. Теперь продолжаемъ описаніе работы.

Такъ или иначе, но дѣти дошли до мысли, что во всѣхъ рѣшенныхъ задачахъ дѣлается съ числами одно и то же: всѣ данныя числа соединяются въ одно, которое равно имъ всѣмъ вмѣстѣ взятымъ. (Что оно равно всѣмъ даннымъ числамъ, вмѣстѣ взятымъ, слѣдуетъ указать для отчетливости мысли). Учитель подтверждаетъ правильность составленнаго опредѣленія, какъ говорилось выше, повторяя его самъ громко и не торопясь. Опредѣленіе въ сущности составлено—надо обозначить понятіе словомъ. Преподаватель говоритъ: такое вычисленіе, при которомъ данныя числа соединяются въ одно, называется *сложеніемъ*. Скажи (указывается ученикъ), какое вычисленіе называется сложеніемъ? Скажи ты (обращаясь къ другому), какъ называется вычисленіе, при которомъ данныя числа соединяются въ одно? Скажи ты (третьему), что дѣлается съ числами при сложеніи? Если я скажу: отъ деревни до почтовой станціи 22 в. и отъ станціи до города 19, надо узнать сколько верстъ отъ деревни до города... то какое вычисленіе надо будетъ сдѣлать? Какъ его назвать? Почему такъ называете? Придумайте еще задачу, для рѣшенія которой надо было бы сдѣлать сложеніе. Дѣти приводятъ нѣсколько примѣровъ. Учитель выбираетъ одинъ изъ *правильно* предложенныхъ примѣровъ и спрашиваетъ предложившаго его ученика: отчего здѣсь надо сдѣлать сложеніе? Другого ученика, также предложившаго примѣръ, учитель спрашиваетъ: а какое вычисленіе ты долженъ сдѣлать? Какъ ты его назовешь? Вѣрно-ли онъ говоритъ? Послѣ 2—3 предложенныхъ примѣровъ, учитель спрашиваетъ кого-нибудь изъ тѣхъ, которые не предлагали своихъ примѣровъ, и заставляетъ ихъ придумать свой примѣръ, а если

они окончательно не могутъ—заставляетъ разобрать одинъ изъ примѣровъ, предложенныхъ другими. Тѣхъ учениковъ, которые не придумали или составили примѣры неправильно, слѣдуетъ спросить позже, такъ какъ полезно сперва закрѣпить упражненіями правильное понятіе; чтобы оно было по возможности ясно, первыя упражненія не должны давать повода къ ошибкамъ и затрудненіямъ, оттого и надо выбирать правильно придуманные примѣры и спрашивать тѣхъ, отъ которыхъ можно ожидать правильнаго отвѣта. Обращеніе къ ученикамъ, не хотѣвшимъ или не могшимъ принять участія въ работѣ, дѣлается съ цѣлью разъяснить имъ недоразумѣнія, если они чего либо не поняли, и заставить ихъ работать, если они не хотѣли этого сдѣлать.

Когда понятіе выработано, закрѣплено и провѣрено, правильно ли понятъ учениками выводъ, можно предложить и такія упражненія, на которыя долженъ послѣдовать отрицательный отвѣтъ: они уже не собьютъ учащихся, а сравненія различныхъ случаевъ полезны. Послѣ опредѣленія сложенія можно, напримѣръ, предложить вопросы, для рѣшенія которыхъ нужно сдѣлать не сложеніе, а другое дѣйствіе, и потребовать объясненія, почему эти вычисленія нельзя назвать сложеніемъ. Но лучше подобныя сравненія дѣлать тогда, когда извѣстны уже оба сравниваемые случая, т. е. лучше не останавливаться на такихъ упражненіяхъ, пока извѣстно только одно сложеніе, а тогда, когда будетъ извѣстно хотя еще одно дѣйствіе. Опредѣливъ, что въ приведенномъ случаѣ вычисленіе нельзя назвать сложеніемъ, и зная, какъ слѣдуетъ назвать разсматриваемое вычисленіе, дѣти больше обратятъ вниманія на это упражненіе и лучше его поймутъ, такъ какъ у нихъ не останется чувства неудовлетворенности, а оно останется, если сдѣланное вычисленіе назвать сложеніемъ нельзя, а какъ назвать — ученики знать не будутъ.

Упражненія, предлагаемыя вслѣдъ за выводомъ, полезно разнообразить какъ можно болѣе, чтобы заставить ученика вдумываться въ работу. Упражненія же, предлагаемыя передъ выводомъ, должны быть, наоборотъ, близки между собою, чтобы вниманіе учащихся могло легко сосредоточиться на общихъ ихъ признакахъ, что и даетъ возможность сдѣлать выводъ. Разнообразіе же послѣдующихъ упражненій—одно изъ главныхъ средствъ вліянія на развитіе уча-

щихся и пріученіе ихъ къ размышленію и самостоятельной работѣ. Въ первые годы обученія и нельзя ожидать бо̀льшей самостоятельности въ работѣ, чѣмъ примѣненіе извѣстнаго къ новымъ случаямъ и подведеніе разбираемыхъ вопросовъ подъ извѣстное уже понятіе.

Я привелъ примѣръ такого вывода, который можетъ быть выполненъ въ одинъ урокъ, притомъ можетъ быть вполнѣ законченъ, т. е. завершается опредѣленіемъ. Но выше уже было упомянуто, что далеко не всѣ выводы такъ просты, не всѣ могутъ быть закончены въ одинъ урокъ. Нѣкоторыя ариѳметическія понятія настолько сложны, что въ первое время обученія весьма трудно усваиваются, если же принять (какъ сдѣлано нами) за основной принципъ: переходить къ выводамъ только послѣ практической подготовки къ нимъ, то нѣкоторые выводы невозможно дѣлать въ началѣ обученія. Къ числу такихъ отвлеченныхъ понятій принадлежитъ, напримѣръ, понятіе о системѣ счисленія. При изложеніи плана курса въ первой части настоящаго руководства, я говорилъ, что понятіе о системѣ счисленія по своей отвлеченности недоступно для начинающихъ, но опредѣлять его въ первое время и нѣтъ надобности: всѣ упражненія относятся къ числамъ первой сотни, что даетъ большія выгоды (причины и выгоды такого ограниченія предѣла чиселъ были указаны).

Понятіе о системѣ счисленія должно быть подготовлено постепенно, по мѣрѣ надобности, такъ что накопляется рядъ частныхъ выводовъ, изъ которыхъ впослѣдствіи дѣлается общій. При ограниченіи упражненій первыми десятью числами накакихъ указаній на систему счисленія, разумѣется, не требуется. Первый частный выводъ, который придется сдѣлать, долженъ указать на *основной пріемъ счета*, въ примѣненіи его къ частному случаю; придется, именно, указать на употребленіе различныхъ единицъ счета, когда при вычисленіяхъ надо употреблять числа большія десяти. Еслибы мы хотѣли только научить счету чиселъ, то достаточно былобы объяснить, какъ считаютъ послѣ десяти. Если же мы хотимъ сдѣлать выводъ, подготовить къ пониманію системы счисленія, то должны объяснить, *почему* употребляются различныя единицы счета (указать на пользу ихъ употребленія), а также и то, что за новую единицу счета можно принять и другое число, не только 10. Указаніе на употребленіе единицъ втораго разряда, сперва можетъ

быть сдѣлано только на устныхъ упражненіяхъ, а способы письменнаго обозначенія разряда единицъ можно показать позже. Употребленіе разныхъ единицъ счета важно показать потому, что объясненіе этого факта укажетъ на сущность системы счисленія, но не потребуетъ отъ ученика непосильной работы, если преподающій ограничится пока этимъ частнымъ случаемъ. Объясненіе значенія десятка, какъ новой единицы счета, и пользы его употребленія легко можетъ быть усвоено дѣтьми, потому что употребленіе различныхъ единицъ счета знакомо имъ изъ практической жизни. При объясненіи слѣдуетъ опираться на это практическое знаніе.

Всякій выводъ, даже и частный, какъ въ настоящемъ случаѣ, долженъ опираться на практическія упражненія. Предварительныхъ практическихъ упражненій въ употребленіи единицъ различныхъ разрядовъ конечно могло и не быть, но учащимся несомнѣнно извѣстно, что нѣкоторые предметы считаютъ пятками и десятками, другіе парами, дюжинами и т. д., и на это знаніе вполнѣ можно опереться. Работу слѣдуетъ начать съ указанія на такіе случаи, когда употребляютъ счетъ пятками и дюжинами и т. п., т. е. принимаютъ эти числа за новыя единицы счета.

Время ознакомленія съ употребленіемъ десятка и перехода къ вычисленіямъ надъ двузначными числами наступаетъ тогда, когда учащіеся уже свободно производятъ всѣ дѣйствія надъ числами перваго десятка *) и дѣлаютъ небольшія задачи.

На значеніи десятка слѣдуетъ остановиться отдѣльно, потому что правильное пониманіе способа употребленія единицъ различныхъ разрядовъ весьма важно для дальнѣйшаго курса.

Преподающій, назначая урокъ на ознакомленіе учащихся съ употребленіемъ десятка, какъ новой единицы счета, заставляетъ дѣтей нѣсколько времени дѣлать вычисленія въ умѣ, потомъ говоритъ: вы умѣете считать и довольно скоро, а какъ считаютъ предметы, когда ихъ очень много? Считаютъ-ли все по одному предмету? Какіе предметы такъ считаютъ? (т. е. пятками, дюжинами и т. п.). Если ученики не припомнятъ соотвѣтствующихъ примѣровъ, то можно напомнить о нихъ, напримѣръ, спросивъ:

*) Напомню, что отдѣльно останавливаться на числахъ перваго десятка, если дѣти свободно производятъ надъ ними вычисленія, совершенно нѣтъ надобности. См. выше.

не видалъ-ли кто-нибудь, какъ считаютъ мѣдныя (или серебряныя) деньги въ церкви или въ лавкѣ? Какъ считаютъ число лошадей? (Парами и тройками). А карандаши, пуговицы какими пачками продаются? Послѣ нѣсколькихъ новыхъ примѣровъ, приведенныхъ уже самими учениками, преподаватель переходитъ къ разбору причины уптребленія такого пріема счета. Объясненіе причины самъ преподаватель высказывать не долженъ; онъ только вызываетъ учащихся на размышленіе, стараясь заставить ихъ сдѣлать выводъ, и потому спрашиваетъ; отчего-же въ торговлѣ многіе предметы считаютъ пачками, монеты при счетѣ складываютъ столбиками и т. п.? Такъ скорѣе считать. Да, подтверждаетъ учитель, считая не отдѣльные предметы, а пачками, кучками, по нѣсколько предметовъ вмѣстѣ, мы сосчитаемъ скорѣе. Замѣтьте, что при этомъ счетъ столбиковъ, дюжинъ и т. п. идетъ точно также, какъ и отдѣльныхъ предметовъ. Если считаютъ десятками, то считаютъ ихъ такъ, какъ и единицы, напр. говорятъ: куплено два (или три, четыре и т. д.) десятка огурцовъ.

На этомъ пока и останавливается объясненіе; до опредѣленія способа счета (до отвлеченія) еще далеко, но на частномъ примѣрѣ показаны основанія пріема. Теперь остается только закрѣпить данное объясненіе пріема счета десятками. Весьма важно при этомъ заставить дѣтей поупражняться въ подобномъ счетѣ на самыхъ предметахъ и при помощи предметовъ выразить то, что объясняютъ на словахъ. Полезно также показать употребленіе счетовъ.

Читатели можетъ быть подумаютъ, что слѣдовало-бы сперва ввести наглядныя упражненія, а потомъ уже говорить о значеніи десятка. Да, это справедливо, если учащіеся недостатоточно хорошо знакомы съ пріемами счета группами предметовъ, если-же они хорошо представляютъ себѣ такіе пріемы (что выразится правильными указаніями на подобные случаи и вѣрными описаніями ихъ), то наглядныя упражненія не нужны. Наглядность нужна не сама по себѣ, а какъ средство сдѣлать вполнѣ доступнымъ и извѣстнымъ то, о чемъ говоритъ учащій; если-же предметъ бесѣды и безъ того уже извѣстенъ и вполнѣ отчетливо представляется дѣтямъ (благодаря простотѣ представленія), то больше ничего и не требуется. Упражненія-же съ наглядными пособіями послѣ объясне-

ній, данныхъ на урокѣ, полезны съ начинающими потому, что даютъ возможность преподавателю прослѣдить, какъ поняты его объясненія. Въ первое время изъ осторожности всегда слѣдуетъ на нихъ останавливаться, тѣмъ болѣе, что много времени они не отнимутъ. Кромѣ того, подобныя упражненія на пособіяхъ *послѣ* объясненій будутъ содѣйствовать развитію въ учащихся привычки провѣрять на опытѣ свои заключенія и вообще вести параллельно размышленіе и опытъ.

Я думаю, что въ огромномъ большинствѣ случаевъ дѣти вполнѣ хорошо знакомы съ пріемами счета различными группами (парами, пятками и т. п.), оттого и не упоминалъ сперва о наглядныхъ пособіяхъ, если-же окажется, что учащіеся плохо представляютъ себѣ такіе пріемы счета, то необходимо обратиться къ нагляднымъ пособіямъ. Я предупреждаю только относительно злоупотребленія наглядными пособіями въ математикѣ. Другое дѣло естественныя науки. Тамъ наглядныя пособія всегда нужны, потому что постоянно идетъ рѣчь о новыхъ предметахъ, которыхъ нельзя представить, не видавши ихъ; тамъ мы изучаемъ именно эти предметы. Цѣль занятій ариѳметикой—познакомить съ отвлеченными вычисленіями и теоріей ихъ, поэтому-то наглядныя пособія и нѣтъ надобности употреблять, когда ученики составили уже соотвѣтствующія представленія; изученіемъ самихъ предметовъ счета ариѳметика не занимается.

Когда учащіеся поймутъ употребленіе десятка и продѣлаютъ значительное количество упражненій въ счетѣ десятками, надо перейти къ счету десятками и единицами вмѣстѣ. Познакомились дѣти съ устнымъ счетомъ двузначныхъ чиселъ—пора показать и письменное изображеніе двузначныхъ чиселъ; откладывать не слѣдуетъ.

Я думаю, что всего лучше познакомить сперва съ записываніемъ чиселъ имѣющихъ и десятки, и единицы, а потомъ уже такихъ, въ которыхъ нѣтъ единицъ, а только десятки. Мы хотимъ познакомить со способомъ обозначенія разряда единицъ, поэтому выгодно заставить учащихся почувствовать потребность въ изобрѣтеніи какого-либо способа обозначенія разряда единицъ, а потомъ прямо указать тотъ способъ, который вошелъ въ употребленіе, т. е. обозначеніе разряда мѣстомъ написанной цифры. Если уче-

ники умѣютъ писать цифры, то потребность въ обозначенiи разряда цифры десятковъ легко можетъ быть вызвана предложенiемъ записать число, въ которомъ есть и единицы и десятки, особенно если число единицъ и десятковъ одинаково (22, 33 и т. д.): ребенокъ непремѣнно задумается надъ тѣмъ, какъ-бы ему отличить десятки отъ единицъ. Учитель тогда прямо показываетъ употребляемый прiемъ, такъ какъ заставлять ученика придумывать его—безполезно (способъ условный). Параллельно съ письменнымъ обозначенiемъ десятковъ полезно показать употребленiе обыкновенныхъ счетовъ и заставить поупражняться въ откладыванiи и чтенiи по нимъ чиселъ.

Когда ученики станутъ свободно вычислять съ двузначными числами, предѣлъ чиселъ, вводимыхъ въ вычисленiя, придется расширить—надо будетъ познакомить учащихся съ употребленiемъ и счетомъ сотенъ. Такимъ образомъ будетъ сдѣланъ еще шагъ къ ознакомленiю съ системой счисленiя. На объясненiи значенiя сотни уже не придется такъ долго останавливаться, какъ на объясненiи десятка; объясненiю много поможетъ сравненiе сотни съ десяткомъ. Когда число предметовъ велико, то и счетъ десятками идетъ медленно, нужно еще увеличить единицу счета; въ противномъ случаѣ пришлось-бы также, дойдя въ счетѣ до дести десятковъ, придумывать новыя названiя для чиселъ; говорить о невозможности давать все новыя названiя неудобно: невозможность эта еще не видна, пока числа не велики.

Нѣкоторые подумаютъ, можетъ быть, что ученики, знакомые съ употребленiемъ десятка и сотни, могутъ перейти и къ опредѣленiю системы. Практика показываетъ, что такое мнѣнiе ошибочно. Дѣти, усвоивъ частные выводы, не могутъ охватить ихъ, не могутъ составить общаго понятiя о способѣ выраженiя чиселъ (о системѣ счисленiя). Доказывается это, и очень ясно, невозможностью для учащихся запомнить опредѣленiе безъ искаженiя и стремленiемъ при объясненiи перейти отъ общаго отвлеченнаго объясненiя къ частнымъ примѣрамъ. Предупреждаемъ учащихъ относительно преувеличенiя силъ учащихся, какъ предупреждаемъ и отъ излишней помощи. Сила обученiя—въ постоянной и тщательной разработкѣ матерiала, въ примѣненiи данныхъ объясненiй къ возможно болѣе разнообразнымъ случаямъ, но съ тѣмъ условiемъ, чтобы учащiеся

всегда ясно понимали каждое упражненіе въ отдѣльности, понимали цѣль его и умѣли его объяснить.

Перехожу къ общимъ указаніямъ относительно хода болѣе широкихъ выводовъ.

Болѣе широкія обобщенія необходимы, какъ заставляющія глубже вдумываться въ предметъ занятій и вмѣстѣ съ тѣмъ облегчающія усвоеніе предмета. Въ нѣкоторыхъ случаяхъ нужно сдѣлать прямо выводъ изъ отдѣльныхъ обобщеній, встрѣчавшихся раньше (какъ, напримѣръ, слѣдуетъ опредѣлить понятіе о нумераціи, когда дѣти познакомятся съ числами, состоящими изъ единицъ многихъ разрядовъ; точно также слѣдуетъ обобщить всѣ случаи умноженія дробей, которые, конечно, приходится сперва разсматривать въ отдѣльности, всѣ случаи дѣленія дробей и т. д.); въ другихъ случаяхъ надо остановиться только на обзорѣ и сопоставленіи пройденнаго по извѣстному отдѣлу (какъ напримѣръ по окончаніи отдѣла о 4 дѣйствіяхъ надъ цѣлыми числами).

Если цѣль работы составляетъ выводъ новаго обобщенія, то выводъ дѣлается такимъ-же способомъ, какъ и прежде, когда дѣлались частные выводы, т. е. преподающій прежде всего приводитъ нѣсколько примѣровъ на тѣ случаи, которые должны быть подведены подъ одно понятіе, заставляетъ опредѣлить каждый изъ нихъ въ отдѣльности, потомъ обращаетъ вниманіе на общіе признаки всѣхъ случаевъ, стараясь достигнуть обобщенія со стороны самихъ учащихся, наконецъ даются по возможности разнообразныя повторительныя упражненія, чтобы достигнуть какъ можно болѣе полнаго разъясненія сдѣланнаго вывода.

Когда дается очень сложное объясненіе, что возможно лишь въ концѣ пятилѣтняго курса, то никакихъ упражненій уже не приводится; учащій *самъ* излагаетъ нужные ему факты и объясняетъ ихъ. Я уже говорилъ, что при обученіи необходимо стремиться довести учащихся до умѣнья понимать чужую мысль, вдумываться и усваивать то, что имъ излагается, а сложныя объясненія легче даются учащимся, если будутъ изложены самимъ преподавателемъ.

Къ такого рода случаямъ я отношу, напримѣръ, объясненіе способа обращенія десятичныхъ дробей въ простыя, объясненіе признаковъ дѣлимости чиселъ и т. п.

Изъ сказаннаго не слѣдуетъ однако-же заключать, что при подобныхъ объясненіяхъ учитель не долженъ допускать никакого участія со стороны учениковъ, нѣтъ, всегда хорошо, если дѣти обращаются съ вопросами къ учителю, дѣлаютъ нѣкоторыя указанія, но учащій, если обращается къ ученикамъ съ вопросами, то только частными, если допускаетъ замѣчанія или вопросы со стороны самихъ дѣтей, то только такіе, которые непосредственно относятся къ дѣлу. Но *главнѣйшая* часть объясненія излагается самимъ учащимъ, и онъ *не* пытается добиться вывода отъ учениковъ.

Если предполагается сдѣлать только обзоръ пройденнаго, то преподающій не даетъ упражненій отъ себя, а предлагаетъ ученикамъ припомнить то, что они проходили по извѣстному отдѣлу; напримѣръ, учитель предлагаетъ припомнить и разсказать, о какихъ дѣйствіяхъ проходили и что о нихъ говорилось.

Припоминать пройденное должны сами учащіеся, потому что надо пріучать ихъ давать самимъ себѣ отчетъ въ пройденномъ, обращать вниманіе на сопоставленіе извѣстныхъ имъ фактовъ. Работа эта для дѣтей вполнѣ доступна, никакихъ выводовъ при этомъ не требуется, но чтобы сдѣлать работу хорошо, дѣти должны обдумать все пройденное по избранному отдѣлу. Только тогда и можно выучить работать, когда заставимъ самихъ учащихся выполнять работу, разумѣется помогая имъ, въ случаѣ затрудненія.

При обзорѣ пройденнаго по тому или другому отдѣлу дѣти въ первое время обыкновенно припоминаютъ пройденное безпорядочно, поэтому учащій долженъ не только пополнить пробѣлы, если они встрѣтятся, но указать и порядокъ, въ которомъ слѣдуетъ излагать приводимые факты, требуя потомъ повторенія сдѣланнаго обзора въ указанномъ порядкѣ.

Пройдя, напримѣръ, о дѣйствіяхъ, полезно предложить учащимся припомнить опредѣленіе каждаго изъ дѣйствій и разсказать о томъ, какъ дѣлается каждое изъ нихъ. Когда обзоръ дѣйствій будетъ сдѣланъ, преподаватель указываетъ на соотношенія дѣйствій (раздѣляетъ ихъ на прямыя и обратныя, показываетъ, что умноженіе есть частный случай сложенія и т. п.).

Когда будетъ пройденъ весь отдѣлъ о дробяхъ, слѣдуетъ заставить учениковъ разсказать о содержаніи всего отдѣла; но прежде чѣмъ учащіеся начнутъ разсказывать о содержаніи отдѣла, надо

установить порядокъ, въ какомъ слѣдуетъ разсказывать о пройденномъ. Если дѣти забываютъ сказать что-либо, преподаватель пополняетъ пробѣлъ, но требуетъ также, чтобы не упоминалось о подробностяхъ, мелочахъ. Такое требованіе пріучаетъ дѣтей отличать существенное отъ второстепеннаго. Въ исправленномъ видѣ составленный разсказъ о содержаніи пройденнаго отдѣла долженъ быть повторенъ учащимися.

Обзоръ пройденнаго полезно дѣлать еще и потому, что отвѣты учащихся могутъ точно показать, насколько усвоено пройденное. Хорошо разсказать о томъ, что объяснялось значительное время тому назадъ, но можно только тогда, если пройденное было хорошо понято и усвоено. Объясненія, данныя недавно, ученики нерѣдко могутъ повторить на пямять, не понимая пройденаго. Этими общими замѣчаніями мы пока и ограничимся.

---

# ПРОГРАММА АРИѲМЕТИКИ

## для школы съ 3-хъ годичнымъ курсомъ.

---

### I годъ.

Ознакомленіе при помощи наглядныхъ предметовъ съ прямымъ и обратнымъ счетомъ до 100; четыре дѣйствія надъ числами, сперва первыхъ двухъ десятковъ, а затѣмъ, когда учащіеся свободно будутъ вычислять съ числами первыхъ двухъ десятковъ,—съ большими числами, но не свыше 100.

Знакомство съ цифрами и знаками дѣйствій. Разъясненіе на примѣрахъ основныхъ ариѳметическихъ понятій, (прибавить, отнять, взять нѣсколько разъ, раздѣлить, сколько разъ сдержится, о разностномъ и кратномъ отношеніяхъ).

Результаты дѣйствій могутъ быть означены терминами (сумма, разность, произведеніе, частное). Дополненіе до 10. Римская нумерація до XX. Пріемы устнаго счета въ указанныхъ предѣлахъ чиселъ.

Устныя и письменныя задачи, записываніе рѣшеній задачъ строчками.

### II годъ.

Ознакомленіе съ нумераціей не далѣе 10000. Письменныя вычисленія съ отвлеченными числами не свыше 10000. Продолженіе упражненія въ устномъ счетѣ. Таблица умноженія. Объясненіе цѣли каждаго дѣйствія; объясненіе производства ихъ; нахожденіе разностнаго и кратнаго отношеній чиселъ не превышающихъ предѣла 1000. Увеличеніе данныхъ чиселъ въ 10 и 100 разъ и уменьшеніе въ 10 и 100 разъ чиселъ, оканчивающихся нулями.

Указаніе различія дѣйствій надъ числами и преобразованій чиселъ (наприм., превращенія и раздробленія именованныхъ чиселъ, выраженія цѣлаго числа въ доляхъ, и т. п.).

Упражненія въ употребленіи торговыхъ счетовъ. Ознакомленіе съ мѣрами длины, вѣса, сыпучихъ тѣлъ и съ денежными знаками.

Знакомство съ простѣйшими долями: $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_8$ и съ простѣйшими вычисленіями надъ ними (напр., сложеніе одинаковыхъ долей, выраженіе небольшого цѣлаго числа въ доляхъ).

Рѣшеніе устныхъ и письменныхъ задачъ, соотвѣтствующихъ курсу, и записываніе рѣшенія ихъ.

## *III годъ.*

Письменныя вычисленія до 1.000,000 и объясненія производства дѣйствій надъ такими числами. Понятіе о повѣркѣ найденныхъ результатовъ дѣйствій. Продолженіе устныхъ вычисленій, но безъ употребленія большихъ чиселъ. Указаніе пріемовъ умственнаго счета. Простѣйшія вычисленія съ дробями $^1/_2$, $^1/_3$, $^1/_4$, $^1/_5$, $^1/_6$, $^1/_7$, $^1/_8$, $^1/_{10}$.

Дѣйствія съ именованными числами, но съ тѣмъ, чтобы при раздробленіяхъ не получались числа больше 1,000.000. Понятіе о квадратныхъ и кубическихъ мѣрахъ.

**Примѣчаніе.** Рѣшеніе задачъ на вычисленіе времени, выраженное составными числами, допускается съ тѣмъ, чтобы каждый мѣсяцъ считался въ 30 дней и не требовалось двоякаго выраженія времени (сколько времени прошло до настоящаго времени, какое число, мѣсяцъ и годъ составляетъ найденное время).

Рѣшеніе устныхъ и письменныхъ задачъ, не требующихъ знанія алгебраическихъ или другихъ особыхъ пріемовъ для рѣшенія ихъ.

**Примѣчаніе.** Рѣшеніе задачъ, не считая преобразованій, встрѣчающихся въ задачѣ, не должно выражаться болѣе, какъ пятью—шестью строчками.

## Объяснительная записка къ программѣ ариѳметики.

Обученіе ариѳметикѣ имѣетъ двоякую цѣль: практическую и общеобразовательную. Для достиженія той и другой цѣли необходимо, чтобы дѣти научились свободно вычислять, умѣли примѣнять свои знанія къ рѣшенію задачъ и сознательно усвоили основныя ариѳметическія понятія (перечисленныя въ программѣ).

Хотя означенныя цѣли могутъ быть достигнуты различными путями, почему могутъ быть допускаемы и различные методы обученія, все же для успѣшнаго хода занятій въ начальной школѣ и для сбереженія столь дорогого въ ней времени необходимо соблюденіе нѣкоторыхъ началъ, которыя и были положены въ основу программы.

Чтобы учащіеся могли съ самаго начала заниматься сознательно и постепенно дойти до усвоенія общихъ понятій, необходимо подраздѣлить курсъ на отдѣлы. Сперва слѣдуетъ брать числа не болѣе 20 (предѣлъ таблицы сложенія) и достигнуть полной твердости вычисленій въ предѣлѣ этихъ чиселъ; тогда только слѣдуетъ переходить къ большимъ числамъ — ко второму отдѣлу, въ которомъ числа однако же не должны превышать 100 (предѣлъ таблицы умноженія). Далѣе размѣры чиселъ, вводимыхъ въ вычисленія, могутъ увеличиваться гораздо быстрѣе, такъ какъ основы счисленія и пріемы производства дѣйствій будутъ уже знакомы учащимся, но спѣшить увеличеніемъ чиселъ все таки не слѣдуетъ, почему въ программѣ и поставлено обязательнымъ во второй годъ употреблять числа лишь до 1000. Даже когда дѣти вполнѣ познакомятся со счисленіемъ (на третій годъ), часто вводить въ упражненія очень большія числа (и то не болѣе 1—10 милліоновъ) нѣтъ надобности.

Такая же постепенность должна соблюдаться въ выработкѣ основныхъ ариѳметическихъ понятій (перечисленныхъ въ программѣ). Въ первомъ отдѣлѣ курса не должно быть сообщаемо никакихъ опредѣленій; достаточно требовать отъ учащихся

умѣнія выразить своими словами то, что они дѣлаютъ съ данными числами, сперва примѣнительно къ каждому частному случаю, а потомъ вводя въ употребленіе указанныя выраженія и знаки дѣйствій, чтобы на практикѣ научить различать послѣднія. Не ранѣе втораго отдѣла слѣдуетъ вводить въ употребленіе ариѳметическіе термины и объясненіе ихъ. Наконецъ такая же постепенность должна быть соблюдаема и въ разъясненіи понятій: на сколько больше или меньше и во сколько разъ больше или меньше. Но, въ виду важности этихъ понятій, указывать ихъ на простѣйшихъ частныхъ примѣрахъ слѣдуетъ уже и въ первомъ отдѣлѣ курса.

Такимъ образомъ результатомъ занятій въ первомъ отдѣлѣ должно быть ясное и отчетливое знаніе результатовъ всѣхъ дѣйствій (табличекъ дѣйствій), пониманіе значенія ихъ, знаніе соотношеній чиселъ и умѣнье примѣнить узнанное къ рѣшенію легкихъ задачъ (устныхъ и письменныхъ) въ предѣлѣ двухъ десятковъ. Именно при рѣшеніи задачъ слѣдуетъ обратить вниманіе на выраженія: „на сколько больше", „во сколько разъ".

Во второмъ отдѣлѣ учащіе должны достигнуть слѣдующихъ результатовъ: 1) умѣнья со стороны дѣтей пользоваться новой единицей счета—десяткомъ, 2) пониманія основного пріема счисленія—выраженія чиселъ единицами различныхъ разрядовъ, 3) знанія пріемовъ вычисленій съ двузначными числами, 4) знанія таблички умноженія однозначныхъ чиселъ, такъ какъ всѣ эти знанія необходимы для сознательнаго усвоенія счисленія и механизма вычисленій съ многозначными числами, наконецъ, умѣнья различать дѣйствія не только знаками, но и словами, т. е. умѣнья выразить словами, указанными въ программѣ, каждое сдѣланное при рѣшеніи задачи вычисленіе.

Въ третьемъ отдѣлѣ надо требовать, чтобы учащіеся могли не только правильно объяснить, что дѣлаютъ съ числами, но примѣнить и ариѳметическій терминъ (названіе дѣйствія), при чемъ надо объяснить и то, что въ дѣленіи встрѣчаются два случая (дѣленіе на части и опредѣленіе содержанія; признать ихъ за одно дѣйствіе дѣти не затруднятся, если привыкнутъ употреблять въ томъ и другомъ

случаѣ одинъ и тотъ же знакъ дѣйствія и будутъ видѣть одинаковость численнаго результата). Отвлеченныя опредѣленія дѣйствій необязательны. Необходимо въ это же время достигнуть безошибочнаго примѣненія выраженій: „на сколько больше (или меньше) даннаго“ и „во сколько разъ“, какъ при отвлеченныхъ вычисленіяхъ, такъ и при рѣшеніи задачъ. Усвоеніе значенія этихъ выраженій легче дается дѣтямъ при прямыхъ дѣйствіяхъ, чѣмъ при обратныхъ.

Для сознательнаго усвоенія учащимися производства дѣйствій необходимо обращать вниманіе на разрядъ получаемыхъ результатовъ дѣйствій надъ единицами отдѣльныхъ, разрядовъ, особенно на разряды произведенія и частнаго, поэтому увеличеніе и уменьшеніе чиселъ въ 10 и 100 разъ поставлено особо въ программѣ. Для разъясненія понятій о дѣйствіяхъ полезно указывать, если позволитъ время, на измѣненія результатовъ дѣйствій при различныхъ измѣненіяхъ данныхъ (не только въ 10 или 100 разъ увеличенія), но во всякомъ случаѣ такія указанія можно дѣлать только на третій годъ обученія и ограничиваясь указаніями лишь *частныхъ* примѣровъ.

Съ мѣрами слѣдуетъ знакомить постепенно, начиная съ перваго года, вводя въ вычисленія такія мѣры, отношенія которыхъ къ мѣрамъ того же рода не превышаютъ размѣра употребляемыхъ уже чиселъ. При прохожденіи третьяго отдѣла нужно, чтобы учащіеся были знакомы съ мѣрами длины, вѣса, монетъ, времени и сыпучихъ тѣлъ. Дѣйствія съ составными именованными числами обязательны въ третій годъ, но для выясненія понятій о единицахъ различныхъ разрядовъ и о перечисленіяхъ единицъ изъ одного разряда въ другой, необходимыхъ при производствѣ дѣйствій (когда въ суммѣ или произведеніи единицъ какихъ либо разрядовъ получается больше 9 единицъ, или въ уменьшаемомъ въ какомъ либо разрядѣ меньше единицъ, чѣмъ въ томъ же разрядѣ вычитаемаго и т. д.), допускается введеніе (при упражненіи въ вычисленіяхъ) небольшихъ составныхъ именованныхъ чиселъ и во второй годъ, но съ тѣмъ, чтобы употребленіемъ такихъ чиселъ учащіеся не затруднялись. Знаніе квадратныхъ и кубическихъ мѣръ для учащихся необязательно, но весьма желательно, чтобы преподающіе

знакомили съ ними учащихся, особенно въ сельскихъ школахъ. Знаніе мѣръ времени необходимо, но долго останавливаться на нихъ не слѣдуетъ: нужны только несложныя задачи на время, такъ какъ начальная школа по недостатку времени обученія особенно должна обращать вниманіе на выясненіе общихъ понятій, не останавливаясь на частныхъ вопросахъ, какимъ является вопросъ о вычисленіи времени, единицы котораго не заключаютъ въ себѣ постояннаго числа меньшихъ мѣръ (въ мѣсяцѣ можетъ быть 28, 29, 30 и 31 день), что вычисленія съ ними дѣлаетъ гораздо болѣе трудными, чѣмъ съ другими мѣрами.

Въ виду практической необходимости въ курсъ введены вычисленія съ долями, на каждомъ шагу требуемыя жизнью. Потребность въ нихъ такъ велика, что на практикѣ они уже существуютъ въ школахъ, но ими можно увлечься и сильно затруднить учениковъ, поэтому необходимо подробно перечислить, какія вычисленія съ долями могутъ быть доступны дѣтямъ безъ обремененія ихъ при благопріятныхъ условіяхъ и какого рода упражненіями можно ограничиться при неблагопріятныхъ условіяхъ, чтобы опредѣлить яснѣе требованія, какія могутъ быть предъявляемы учащимъ. Съ цѣлью указать ограниченность обязательныхъ требованій, въ программѣ только упомянуто о необходимости нѣкотораго знакомства съ долями и съ нѣкоторыми, чаще всего встрѣчающимися въ жизни, вычисленіями съ долями. Вычисленія съ дробями сильно вліяетъ на развитіе ариѳметической мысли учащихся.

Наибольшій размѣръ свѣдѣній о доляхъ, какія могутъ быть допускаемы, слѣдующій: 1) Нахожденіе одной или нѣсколькихъ частей, которыя сами выражаются цѣлымъ числомъ; 2) нахожденіе такихъ частей единицы, которыя наиболѣе употребительны въ жизни (напр. $^1/_2$, $^1/_4$, $^1/_8$, $^1/_{10}$, $^1/_5$, $^1/_3$; 3) употребленіе *нѣсколькихъ* изъ числа уже знакомыхъ долей единицы; 4) образованіе цѣлыхъ изъ частей единицы и выраженіе цѣлыхъ въ доляхъ единицы; 5) сложеніе и вычитаніе одинаковыхъ частей единицы; 6) повтореніе частей единицы нѣсколько разъ; 7) нахожденіе по цѣлому части и по части цѣлаго, когда и данное, и искомое суть цѣлыя числа; 8) сложеніе и

вычитаніе различныхъ долей можетъ быть допущено только относительно употребительнѣйшихъ въ жизни случаевъ, напр. $^1/_2$ съ $^1/_8$, и если ученики сейчасъ же угадываютъ, въ какихъ доляхъ можетъ быть выражена сумма. Всѣ эти упражненія могутъ быть допускаемы только при рѣшеніи задачъ, безъ всякихъ теоретическихъ объясненій и выводовъ.

Изъ перечисленныхъ упражненій обязательны только 1, 2, 4 и 5. Упражненія съ долями, не составляя особой части курса, должны распредѣлятся на два года обученія: при рѣшеніи задачъ, дающихъ къ тому поводъ, и при упражненіяхъ въ отвлеченномъ счетѣ, постепенно дѣлаясь нѣсколько сложнѣе: сперва, напримѣръ, находятъ $^1/_2$, $^1/_4$ такихъ чиселъ какъ 8 фунтовъ, 12 аршинъ, потомъ находятъ, что половина аршина=8 вершкамъ, что, раздѣливъ единицу на двѣ равныя части, получимъ половину, что 6 половинъ составятъ три цѣлыхъ, а въ 5 цѣлыхъ десять половинъ и т. д.

Всякаго рода вычисленія, встрѣчающіяся въ курсѣ, должны во всѣ три года дѣлаться и устно, и письменно, устно—преимущественно съ небольшими числами, письменно—съ большими числами; хорошо вычисляетъ только тотъ, кто можетъ вычислять и въ умѣ. Полезно также упражнять въ сложеніи и вычитаніи на торговыхъ счетахъ, такъ какъ подобныя вычисленія развиваютъ пониманіе пріемовъ вычисленій и практически очень полезны.

При хорошихъ успѣхахъ учащихся, если они твердо усвоили все указанное въ программѣ, можно познакомить ихъ съ понятіемъ о $^0/_0$, какъ сотой долѣ числа, съ нахожденіемъ одного и нѣсколькихъ $^0/_0$ данной суммы денегъ, съ нахожденіемъ $^0/_0$ за мѣсяцъ и за время большее года по найденной прибыли за годъ.

Во всѣ три года необходимо упражнать учащихся въ рѣшеніи задачъ, при чемъ задачи должны даваться какъ для пріобрѣтенія навыка къ вычисленіямъ и умѣнья примѣнять дѣйствія (съ служебною цѣлью), такъ и для содѣйствія цѣли общеобразовательной; первыя должны быть легки, т. е. учащіеся должны сейчасъ же видѣть, какія дѣйствія съ данными числами слѣдуетъ дѣлать и въ какой послѣдовательности

(должны видѣть, какъ разбить сложную задачу на рядъ простыхъ) или даже можетъ быть прямо указано въ задачѣ, какія дѣйствія надо сдѣлать; вторыя не должны заключать въ себѣ большихъ чиселъ и не должны затруднять вычисленіями, чтобы все вниманіе учащагося могло быть обращено на содержаніе задачи; на рѣшеніи вторыхъ задачъ учащіеся должны познакомиться съ такими случаями примѣненія ариѳметики, которыя постоянно встрѣчаются въ жизни, но требуютъ соображенія. Этимъ выражается, что хотя задачи второго рода, требующія извѣстнаго напряженія мысли учащагося, полезны, но увлекаться усложненіемъ условій и отвлеченностью ихъ выраженія никакъ не слѣдуетъ.

При рѣшеніи задачъ слѣдуетъ требовать не только нахожденія результата, но и умѣнья изложить устно ходъ рѣшенія и письменно показать порядокъ сдѣланныхъ вычисленій и полученный въ каждомъ изъ нихъ результатъ.

Надо также требовать, чтобы учащіеся привыкли запоминать содержаніе задачи безъ многократнаго повторенія ея и пріучать приниматься за рѣшеніе задачи предварительно обдумавъ, какъ ее рѣшать.

Изложеніе программы показываетъ, что при благопріятныхъ условіяхъ учащій можетъ, если находитъ полезнымъ, пройти въ первый годъ больше обязательнаго (наименьшій предѣлъ—два десятка) или во второй годъ (предѣлъ наименьшій—тысяча), а въ третій годъ могутъ быть сдѣланы дополненія, которыя указаны въ объяснительной запискѣ.



ЦѢНА 50 КОП.